Shu-hsüeh hsüeh-pao
1960, Vol. 10, no. 2

数 学 学 报

ACTA MATHEMATICA SINICA

第10卷 第2期

Vol. 10 No. 2

1960

中国数学会編輯

科学出版社出版

数 学 学 报

第10卷 第2期

目 录

ACTA MATHEMATICA SINICA Vol. 10, No. 2

CONTENTS

第10卷 第2期 数学学报 Vol. 10, No. 2
1960年6月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1960

陣的特征根的限界(III)*

耿　济
(交通大学)

本文是[16,24]的續作,現在再討論陣的特征根上的两个問題: 卽陣的絕对值最大特征根的模数与陣的特征根全为实根或者全为純虛根的充要条件.

一

設 λ 为任意陣 $A = \|a_{ij}\|_1^n$ 的一个特征根,

$$N = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^{2**},\ \bar{R} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,\ \bar{T} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|,$$

$$\overline{RT} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|.$$

我們曾考虑过下面三个主要的不等式

$$|\lambda|^2 \leqq N, \tag{24'}$$

$$|\lambda| \leqq \min(\bar{R}, \bar{T}), \tag{2'}$$

$$|\lambda|^2 \leqq \overline{RT} \tag{1'}$$

的改进工作,在[16,24]中已經采用相同的方法改善了这三个定理,有关这一方面的資料再作几点补充.

Farnell 曾得到[2][21]

$$|\lambda|^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{37}$$

以及

$$|\lambda|^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{|a_{ij}| + |a_{ji}|}{2}\right)^2. \tag{38}$$

易知(37)与(38)都比(24′)更精确些.

近来 Brauer[25] 又进一步地修正 Ledermann[12], Ostrowski[13] 得到的結果.

令

$$\underline{R} = \min_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,\quad a = \min_{i \neq j}\{|a_{ij}|\},$$

就有

$$|\lambda| \leqq \bar{R} - a\left\{1 - \frac{2(\underline{R} - a)}{\bar{R} - 2a + [\bar{R}^2 - 4a(\bar{R} - \underline{R})]^{1/2}}\right\}. \tag{39}$$

---

* 1959年9月16日收到.

** 在[16]中記为 a_1 的.

此外，当 $a>0$ 时还有

$$X_n \geqq \frac{-\bar{R}+\underline{R}+[(\bar{R}-\underline{R})^2+4a^2]^{\frac{1}{2}}}{2a}. \tag{40}$$

实际上(39)是不包含(16)，又(40)与(9)是一致的[但是(9)中 $a=0$ 是有意义的]，Brauer 应用(40)也获得一些結果[25,26,27].

最近著者[28]修正(16)得到

$$|\lambda| \leqq \bar{R}-\frac{2an(\bar{R}-R)}{2a+(n-1)\{\bar{T}-\underline{T}+[(\bar{T}-\underline{T})^2+4a^2]^{1/2}\}},$$

这里 $R=\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$.

二

在叙述陣 A 的絕对值最大特征根的模数的基本定理之前，先行采用几个記号.

設 K 为正整数.

$$A^K=\|a_{ij}^{(K)}\|_1^n,\quad D_K=\left\|\frac{|a_{ij}^{(K)}|+|a_{ji}^{(K)}|}{2}\right\|_1^n=\|d_{ij}^{(K)}\|_1^n,$$

$$R_i(K)=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}^{(K)}|,\quad T_i(K)=\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}^{(K)}|,\ S_i(K)=\sum_{j=1}^{n}d_{ij}^{(K)};$$

$\overline{R(K)}=\max_i R_i(K)$, $\overline{T(K)}=\max_i T_i(K)$, $\overline{S(K)}=\max_i S_i(K)$, $\overline{R(K)T(K)}=\max_i R_i(K)T_i(K)$ 以及 $N(K)=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}^{(K)}|^{2}$(*).

定理 13. 設 $\omega=\max(|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|)$，則

$$\omega=\lim_{K\to\infty}[N(K)]^{\frac{1}{2K}}, \tag{39'}$$

$$\omega=\lim_{K\to\infty}[\overline{R(K)}]^{\frac{1}{K}}$$

$$\omega=\lim_{K\to\infty}[\overline{T(K)}]^{\frac{1}{K}}, \tag{42}$$

$$\omega=\lim_{K\to\infty}[\overline{R(K)T(K)}]^{\frac{1}{2K}}, \tag{43}$$

这里 (39′) 与 (42) 是已知的，Farnell[21]，Gautschi[23] 获得 (39′)；在 Wong[29] 叙述陣的范数性质中易知(40)是成立的(**)，最近 Marathe[30] 对于陣的范数的某些性质作了直接的証明.

(*) 在[16]中記 $N(K)$ 为 a_K 的.

(**) 設 $\|A\|=\bar{R}$ 或 $\bar{T}$，則具有下述性质：

i) $\|SA\|=|S|\|A\|$，S 为純量，ii) $\|E\|=1$，E 为么陣，iii) $\|A+B\|\leqq\|A\|+\|B\|$，iv) $\|AB\|\leqq\|A\|\|B\|$，v) $\|A_1\|\leqq\|A\|$ A_1 为 A 的子陣，vi) 当 $\lim_{p\to\infty}A_p=A$ 时，則 $\lim_{p\to\infty}\|A-A_p\|=0$；具有这些性质的 $\|A\|$，就有

$$\max(|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|)=\lim_{p\to\infty}\|A^p\|^{\frac{1}{p}}.$$

特別当 $K = 2^l$ 时 Farnell[21] 指出 (39′) 是成立的; 这一証明較长,现在給 (39′) 作一个簡短的一般的証明.

設 K 为正整数, $A^K = \|a_{ij}^{(K)}\|_1^n$, 当 $a_{ij}^{(K)} = 0\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 时, (39′) 显然成立. 当所有的 $a_{ij}^{(K)}$ 不全为零时,又設

$$\frac{A^K + A^{K*}}{2} = \|b_{ij}^{(K)}\|_1^n, \quad \frac{A^K - A^{K*}}{2i} = \|c_{ij}^{(K)}\|_1^n,$$

$$b_K = \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}^{(K)}|^2, \quad c_K = \sum_{i,j=1}^n |c_{ij}^{(K)}|^2;$$

再以

$$q_K = \frac{\max(b_K, c_K) + \rho(A, K)\min(b_K, c_K)}{b_K + c_K}$$

$$(-1 \leqq \rho(A, K) \leqq 1)$$

代入推广的 Schur 定理[24]中,就有

$$\sum_{l=1}^n |\lambda_l|^{2K} = \max(b_K, c_K) + \rho(A, K)\min(b_K, c_K)$$
$$= (b_K + c_K)q_K = N(K)q_K \tag{44}$$

这里 $0 < q_K \leqq 1$, 故有 $\lim\limits_{K\to\infty} q_K^{\frac{1}{2K}} = 1$.

最后在(44)两边开 $2K$ 次方,当K趋于无穷大时,就有(39′).

又从 Barankin 定理[3]与 Farnell 定理[2]知道

$$|\lambda| \leqq [\overline{R(K)T(K)}]^{\frac{1}{2K}} \leqq [\overline{R(K)}]^{\frac{1}{2K}} \cdot [\overline{T(K)}]^{\frac{1}{2K}},$$

当K趋于无穷大时,由(42)知道(43)成立.

此外,我們又从下列不等式

$$[\overline{R(K)T(K)}]^{\frac{1}{2}} \leqq \overline{S(K)} \leqq \max(\overline{R(K)}, \overline{T(K)})$$

得到下面的推論

推論.

$$\omega = \lim_{K\to\infty} [\overline{S(K)}]^{\frac{1}{K}}. \tag{45}$$

为了加速定理 13 中的收斂速度,我們再引进一批記号.

$$\underline{R(K)} = \min_i R_i(K), \ \underline{T(K)} = \min_i T_i(K), \ \underline{S(K)} = \min_i S_i(K),$$

$$\underline{R(K)T(K)} = \min_i R_i(K)T_i(K); \ R(K) = T(K) = S(K) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^{(K)}|;$$

$$a(K) = \min_{i \neq j}\{|a_{ij}^{(K)}|\}, \ d(K) = \min_{i \neq j}\{d_{ij}^{(K)}\},$$

$$e(K) = \frac{1}{2n^2}\sum_{i,j=1}^n (|a_{ij}^{(K)}| - |a_{ji}^{(K)}|)^2.$$

这样,我們又可以获得下面的比 (39′), (42), (43) 更精确的一些結果.

定理 14.

$$\left\{\begin{aligned}\omega &= \lim_{K\to\infty}\left\{N(K) - \frac{a^4(K)e(K)}{[\overline{R(K)} - \underline{R(K)} + a(K)]^4}\right\}^{\frac{1}{2K}},\\ \omega &= \lim_{K\to\infty}\left\{N(K) - \frac{a^4(K)e(K)}{[\overline{T(K)} - \underline{T(K)} + a(K)]^4}\right\}^{\frac{1}{2K}}.\end{aligned}\right. \tag{46}$$

証明. 从(26)与(39′)易知(46)成立.

定理 15.

$$\left\{\begin{aligned}\omega &= \lim_{K\to\infty}\left[\overline{R(K)} - \frac{\overline{R(K)} - R(K)}{\overline{T(K)} - \underline{T(K)} + a(K)}a(K)\right]^{\frac{1}{K}},\\ \omega &= \lim_{K\to\infty}\left[\overline{T(K)} - \frac{\overline{T(K)} - T(K)}{\overline{R(K)} - \underline{R(K)} + a(K)}a(K)\right]^{\frac{1}{K}}.\end{aligned}\right. \tag{47}$$

証明. 从(16)与(42)易知(47)成立.

定理 16.

$$\left\{\begin{aligned}\omega &= \lim_{K\to\infty}\left[\overline{R(K)T(K)} - \frac{\underline{\underline{R(K)}}}{\overline{\overline{R(K)}}}\cdot\frac{\overline{R(K)T(K)} - R(K)T(K)}{[\overline{R(K)} - \underline{R(K)} + a(K)]^2}a^2(K)\right]^{\frac{1}{2K}},\\ \omega &= \lim_{K\to\infty}\left[\overline{R(K)T(K)} - \frac{\underline{\underline{T(K)}}}{\overline{\overline{T(K)}}}\cdot\frac{\overline{R(K)T(K)} - R(K)T(K)}{[\overline{T(K)} - \underline{T(K)} + a(K)]^2}a^2(K)\right]^{\frac{1}{2K}}.\end{aligned}\right. \tag{48}$$

証明. 从(5)与(42)易知(48)成立.

定理 17.

$$\omega = \lim_{K\to\infty}\left[\overline{S(K)}^2 - \frac{\underline{\underline{S(K)}}}{\overline{\overline{S(K)}}}\cdot\frac{\overline{S(K)}^2 - S^2(K)}{[\overline{S(K)} - \underline{S(K)} + d(K)]^2}d^2(K)\right]^{\frac{1}{2K}}. \tag{49}$$

証明. 从(13)与(45)易知(49)成立.

定理 18.

$$\omega = \lim_{K\to\infty}\left[\overline{S(K)} - \frac{\overline{S(K)} - S(K)}{\overline{S(K)} - \underline{S(K)} + d(K)}d(K)\right]^{\frac{1}{K}}. \tag{50}$$

証明. 与(49)証法相似.

三

我們熟知 Hermitian 陣的特征根全为实根,反 Hermitian 陣的特征根全为純虛根(这里把 0 視为 $0i$ 的). 这一著名定理的特例远在 1829 年 Cauchy 已經指出,实对称陣的特征根全为实根,后来 1879 年 Weierstrass 指出,实斜对称陣的特征根全为純虛根[15].

現在不仅給这一著名的結果另一証明,而且还得到任意陣的特征根全为实根或者全为純虛根的充要条件的結果(*).

(*) 在[24]中我們有:

$$設\ \xi = \sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{a_{ij} + \bar{a}_{ji}}{2}\right|^2,\quad \eta = \sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{a_{ij} - \bar{a}_{ji}}{2i}\right|^2,$$

則陣 A 的特征根全为实根(或純虛根)的充要条件为 $\sum_{l=1}^{n}|\lambda_l|^2 = \xi - \eta$(或 $\eta - \xi$).

現在所討論的比这一結果更深入些.

設陣A的K次冪的p层締結方陣 $A_p^K = \|a_{ij}^{(K,p)}\|_1^N$，此处

$$N = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}, \quad 1 \leqq p \leqq n,$$

$$\frac{A_p^K + A_p^{K*}}{2} = \|b_{ij}^{(K,p)}\|_1^N, \quad \frac{A_p^K - A_p^{K*}}{2i} = \|c_{ij}^{(K,p)}\|_1^N,$$

以及

$$a_{Kp} = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}^{(K,p)}|^2, \quad b_{Kp} = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}^{(K,p)}|^2, \quad c_{Kp} = \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}^{(K,p)}|^2.$$

我們有下面的定理：

定理 19. 陣A的所有特征根全为实根的充要条件为

$$\lim_{K\to\infty} \frac{c_{Kp}}{b_{Kp}} = 0, \tag{52}$$

这里 $1 \leqq p \leqq r$，$|A_r| \neq 0$，$|A_{r+1}| = 0$。

定理 20. 陣A的所有特征根全为純虛根的充要条件为

$$\lim_{K\to\infty} \frac{c_{Kp}}{b_{Kp}} = \begin{cases} \infty, & K^2 + p^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\,2),\ K^2 + p^2 \not\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\,4) \\ 0, & K^2 + p^2 \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\,2) \text{ 或 } K^2 + p^2 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\,4), \end{cases} \tag{53}$$

这里 $1 \leqq p \leqq r$，$|A_r| \neq 0$，$|A_{r+1}| = 0$。

特别当A为 Hermitian 陣时，A_p^K 仍为 Hermitian 陣[32]，即任何的正整数K，p都有 $c_{Kp} = 0$；又当A为反 Hermitian 陣，且p与K同时为奇数时，A_p^K 为 Hermitian 陣，否則为反 Hermitian 陣[32]，即K，p同时为奇数时，才有 $b_{K,p} = 0$，此外就有 $c_{K,p} = 0$。根据上述两定理立刻推知 Hermitian 陣、反 Hermitian 陣的这一重要的性质。

定理 19 及定理 20 的証明. 首先假設 $\lambda_l = \rho_l e^{i\theta_l}$ $(1 \leqq l \leqq r,\ 0 \leqq \theta_l < 2\pi)$ 及 $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ 为陣A的特征根，不妨假定 $\rho_1 \geqq \rho_2 \geqq \cdots \geqq \rho_n$，根据 Kronecker 定理[31,32]知道 A_p^K 的

$$\binom{n}{p} \text{个特征根为 } \lambda_{l_1}^K \lambda_{l_2}^K \cdots \lambda_{l_p}^K \quad (1 \leqq l_1 \leqq l_2 \leqq \cdots \leqq l_p \leqq n).$$

当K为充分大的正整数时，就有[23]

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}^2 K\theta_1 &\approx \frac{c_{K1}}{b_{K1}}, \\ \mathrm{tg}^2 K(\theta_1 + \theta_2) &\approx \frac{c_{K2}}{b_{K2}}, \\ \cdots \quad \cdots & \quad \cdots, \\ \mathrm{tg}^2 K(\theta_1 + \cdots + \theta_r) &\approx \frac{c_{Kr}}{b_{Kr}}. \end{aligned} \tag{54}$$

其次欲証 $\arg \lambda_1 \equiv 0$ (mod. π) 的充要条件为

$$\lim_{K\to\infty} \frac{c_{K1}}{b_{K1}} = 0. \tag{55}$$

必要条件：当 $\theta_1 = 0$ 或 π 时，从(54.1)显然得出(55)。

充分条件：若(55)成立，又令

$$\mathrm{tg}\, K\theta_1 \approx \left(\frac{c_{K1}}{b_{K1}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ 或 } -\left(\frac{c_{K1}}{b_{K1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

此时出現

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{\operatorname{tg}(K+1)\theta_1-\operatorname{tg}K\theta_1}{1+\operatorname{tg}(K+1)\theta_1\operatorname{tg}K\theta_1}\to 0,$$

因此 $\theta_1=0$ 或 π.

同理可証 $\arg(\lambda_1+\cdots+\lambda_p)\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ \pi)\ (1\leqq p\leqq r)$ 的充要条件为(52).

所以定理 19 成立.

最后欲証 $\arg\lambda_1\equiv\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{mod.}\ \pi)$ 的充要条件为

$$\lim_{K\to\infty}\frac{c_{K1}}{b_{K1}}=\begin{cases}0 & K\not\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ 2),\\ \infty & K\not\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ 2).\end{cases}\tag{56}$$

必要条件：当 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 时,从(54.1)显然得到(56).

充分条件：若(56)成立,即

$$\left\{\frac{c_{2h,1}}{b_{2h,1}}\right\}\to 0\quad\left\{\frac{b_{2h+1,\,1}}{c_{2h+1,\,1}}\right\}\to 0.$$

此时也有

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\theta_1&=\frac{\operatorname{tg}(2h+1)\theta_1-\operatorname{tg}2h\theta_1}{1+\operatorname{tg}(2h+1)\theta_1\operatorname{tg}2h\theta_1}\\&=\frac{1-\operatorname{tg}2h\theta_1\operatorname{ctg}(2h+1)\theta_1}{\operatorname{tg}2h\theta_1+\operatorname{ctg}(2h+1)\theta_1}\to\infty,\end{aligned}$$

因此 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$.

同理可証 $\arg(\lambda_1+\cdots+\lambda_p)\equiv\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{mod.}\ \pi)$. $(1\leqq p\leqq r)$的充要条件为(53).

所以定理 20 成立.

从定理 19 及定理 20 易知

推論. 陣 A 的所有特征根全为实根或純虚根的充要条件为

$$\lim_{K\to\infty}\frac{c_{2K,\,p}}{b_{2K,\,p}}=0,$$

这里 $1\leqq p\leqq r$, $|A_r|\neq 0$, $|A_{r+1}|=0$.

参 考 文 献

[24] 耿济：陣的特征根的限界(Ⅱ)，数学学报，**9** (1959), 174—180.

[25] Alfred Brauer, The theorems of Ledermann and Ostrowski on positive matrices. *Duke Math. J.*, **24** (1957), 265—274.

[26] Alfred Brauer, A new proof of theorems of Perron and Frobenius on non-negative matrices. *Duke Math. J.*, **24** (1957), 367—378.

[27] Alfred Brauer, Limits for the characteristic roots of a matrix, VII. *Duke Math. J.*, **25** (1958), 583—590.

[28] 耿济：Frobenius 定理的改进,科学技术报告集，**1** (1959), 43—46.

[29] Wong, Y. K., Some properties of the proper valves of a matrix., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 891—899.

[30] Marathe, C. R., On certain moduli of re ctangular matrices. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **65** (1957—58), 13—38.

[31] Гантмахер, Ф. Р., 矩陣論(中譯本), 高等教育出版社(1956), 19—22 及 68—73.

[32] 张远达：行列式論与矩陣論, 商务 (1954), 89—94 及 204—207.

LIMITS FOR THE CHARACTERISTIC ROOTS OF A MATRIX (III)

G. GUN

(*Chiao-Tung University*)

ABSTRACT

This paper is a continuation of my papers [16] and [24].

We difine:

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ are the characteristic roots of A;

$$\omega = \max(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|),$$

$$A^K = \|a_{ij}^{(K)}\|_1^n, \quad D_K = \left\| \frac{|a_{ij}^{(K)}| + |a_{ji}^{(K)}|}{2} \right\|_1^n = \|d_{ij}^{(K)}\|_1^n,$$

$$N(K) = \sum_{ij} |a_{ij}^{(K)}|^2, \quad R_i(K) = \sum_j |a_{ij}^{(K)}|, \quad T_i(K) = \sum_j |a_{ji}^{(K)}|,$$

$$S_i(K) = \sum_j d_{ij}^{(K)};$$

$$\overline{R(K)} = \max_i R_i(K), \quad \overline{T(K)} = \max_i T_i(K), \quad \overline{S(K)} = \max_i S_i(K),$$

$$\overline{R(K)T(K)} = \max_i R_i(K)T_i(K);$$

$$\underline{R(K)} = \min_i R_i(K), \quad \underline{T(K)} = \min_i T_i(K), \quad \underline{S(K)} = \min_i S_i(K),$$

$$\underline{R(K)T(K)} = \min_i R_i(K)T_i(K);$$

$$R(K) = T(K) = S(K) = \frac{1}{n} \sum_{ij} |a_{ij}^{(K)}|;$$

$$a(K) = \min_{i \neq j} \{|a_{ij}^{(K)}|\}, \quad d(K) = \min_{i \neq j} \{d_{ij}^{(K)}\},$$

$$e(K) = \frac{1}{2n^2} \sum_{ij} (|a_{ij}^{(K)}| - |a_{ji}^{(K)}|)^2;$$

and denote

A_p to be the p-th compound matrix of A.

$$A_p^K = \|a_{ij}^{(Kp)}\|_1^N, \quad \frac{A_p^K + A_p^{K*}}{2} = \|b_{ij}^{(Kp)}\|_1^N, \quad \frac{A_p^K - A_p^{K*}}{2i} = \|c_{ij}^{(Kp)}\|_1^N;$$

$$\left(N = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}\right)$$

$$a_{Kp} = \sum_{ij} |a_{ij}^{(Kp)}|^2, \quad b_{Kp} = \sum_{ii} |b_{ij}^{(Kp)}|^2, \quad c_{Kp} = \sum_{ij} |c_{ij}^{(Kp)}|^2,$$

where A^* is the conjugate of the transpose of A and K may be any positive integer.

In this paper We shall prove some theorems as follows:

Theorem 13.

$$\omega = \lim_{K\to\infty} [\overline{R(K)T(K)}]^{\frac{1}{2K}}$$

Theorem 14.

$$\omega = \lim_{K\to\infty} \left\{N(K) - \frac{a^4(K)e(K)}{[\overline{R(K)} - \underline{R(K)} + a(K)]^4}\right\}^{\frac{1}{2K}},$$

$$\omega = \lim_{K\to\infty} \left\{N(K) - \frac{a^4(K)e(K)}{[\overline{T(K)} - \underline{T(K)} + a(K)]^4}\right\}^{\frac{1}{2K}}.$$

Theorem 15.

$$\omega = \lim_{K\to\infty} \left[\overline{R(K)} - \frac{\overline{R(K)} - R(K)}{\overline{T(K)} - \underline{T(K)} + a(K)}\, a(K)\right]^{\frac{1}{K}},$$

$$\omega = \lim_{K\to\infty} \left[\overline{T(K)} - \frac{\overline{T(K)} - T(K)}{\overline{R(K)} - \underline{R(K)} + a(K)}\, a(K)\right]^{\frac{1}{K}}.$$

Theorem 16.

$$\omega = \lim_{K\to\infty} \left[\overline{R(K)T(K)} - \frac{\underline{R(K)}}{\overline{R(K)}} \cdot \frac{\overline{R(K)T(K)} - R(K)T(K)}{[\overline{R(K)} - \underline{R(K)} + a(K)]^2}\, a^2(K)\right]^{\frac{1}{2K}},$$

$$\omega = \lim_{K\to\infty} \left[\overline{R(K)T(K)} - \frac{\underline{T(K)}}{\overline{T(K)}} \cdot \frac{\overline{R(K)T(K)} - R(K)T(K)}{[\overline{T(K)} - \underline{T(K)} + a(K)]^2}\, a^2(K)\right]^{\frac{1}{2K}}.$$

Theorem 17.

$$\omega = \lim_{K\to\infty} \left\{\overline{S(K)}^2 - \frac{\underline{S(K)}}{\overline{S(K)}} \cdot \frac{\overline{S(K)}^2 - S^2(K)}{[\overline{S(K)} - \underline{S(K)} + d(K)]^2}\, d^2(K)\right\}^{\frac{1}{2K}}.$$

Theorem 18.

$$\omega = \lim_{K\to\infty} \left[\overline{S(K)} - \frac{\overline{S(K)} - S(K)}{\overline{S(K)} - \underline{S(K)} + d(K)}\, d(K)\right]^{\frac{1}{K}}.$$

Theorem 19. The n characteristic roots of an arbitrary n-square matrix A are all real, if and only if

$$\lim_{K\to\infty} \frac{c_{Kp}}{b_{Kp}} = 0,$$

hence $1 \leqq p \leqq r$, $|A_r| \neq 0$, $|A_{r+1}| = 0$.

Theorem 20. The n characteristic roots of an arbitrary n-square matrix A are all pure imaginaries or zeros, if and only if

$$\lim_{K\to\infty} \frac{c_{Kp}}{b_{Kp}} = \begin{cases} \infty & K^2 + p^2 \equiv 0 (\text{mod. } 2),\ K^2 + p^2 \not\equiv 0 (\text{mod. } 4) \\ 0 & K^2 + p^2 \not\equiv 0 (\text{mod. } 2), \text{ or } K^2 + p^2 \equiv 0 (\text{mod. } 4) \end{cases}$$

hence $1 \leqq p \leqq r$, $|A_r| \neq 0$, $|A_{r+1}| = 0$.

第 10 卷 第 2 期 数 学 学 报 Vol. 10, No. 2
1960 年 6 月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1960

一类微分方程組在一个临界情形中的解的稳定条件*

許 淞 庆
(中山大学)

1. 考虑下列扰动运动微分方程組:

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{\sigma=1}^{n}\left(p_{s\sigma}+\frac{1}{t^\gamma}q_{s\sigma}(t)\right)x_\sigma+X_s^{(1)}(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{t^\gamma}X_s^{(2)}(x_1,\cdots,x_n,t),\quad (1)$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

其中 γ 及 $p_{s\sigma}$ $(s,\sigma=1,\cdots,n)$ 为实常数,且 $\gamma>0$, 而 $q_{s\sigma}(t)$ $(s,\sigma=1,\cdots,n)$ 为实变数 t 之实函数,当一切 $t\geqslant T>0$ 时定义、連續及有界; $X_s^{(1)}$ $(s=1,\cdots,n)$ 为 $x_1,\cdots,x_n$ 之正則函数,其展开式不含低于二次之項,并具实常数系数;至于 $X_s^{(2)}$ $(s=1,\cdots,n)$ 为 $x_1,\cdots,x_n$ 之正則函数,其按 $x_1,\cdots,x_n$ 之冪的展开式为:

$$X_s^{(2)}(x_1,\cdots,x_n,t)=\sum_{m_1+\cdots+m_n\geqslant 2}R_s^{(m_1,\cdots,m_n)}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n},$$

此处系数 $R_s^{(m_1,\cdots,m_n)}$ 为 t 之連續函数,当一切 $t\geqslant T>0$ 时有界,并使得对于一切 $t\geqslant T>0$ 函数 $X_s^{(2)}$ 为 $x_1,\cdots,x_n$ 之一致正則函数[1].

为了叙述方便,今后将称这样的函数 $X_s^{(2)}$ 为满足条件(L).

本文目的在于研究組(1)的平凡解即未被扰动运动 $x_1=\cdots=x_n=0$ 在下述情形中的稳定性: 設对应于矩陣 $\|p_{s\sigma}\|$ 的特征方程有一个零根而其余一切根均具有負实数部分.

如所周知,在所作的假定下,利用非奇异的常数实系数綫性变换,永远可以把組(1)变成另一个方程組,使有等式[1]

$$p_{s1}=p_{1s}=0\quad(s=1,\cdots,n).$$

設这变換已經完成,則組(1)可写成下列形式:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=\frac{1}{t^\gamma}\sum_{\sigma=1}^{n}q_{1\sigma}(t)x_\sigma+X_1^{(1)}(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{t^\gamma}X_1^{(2)}(x_1,\cdots,x_n,t),\\ \frac{dx_s}{dt}&=\frac{1}{t^\gamma}q_{s1}(t)x_1+\sum_{\sigma=2}^{n}\left(p_{s\sigma}+\frac{1}{t^\gamma}q_{s\sigma}(t)\right)x_\sigma+X_s^{(1)}(x_1,\cdots,x_n)+\\ &\quad+\frac{1}{t^\gamma}X_s^{(2)}(x_1,\cdots,x_n,t).\quad(s=2,\cdots,n)\end{aligned}\quad (2)$$

此时特征方程

$$\begin{vmatrix}p_{22}-\mathscr{H} & \cdots & p_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\mathscr{H}\end{vmatrix}=0\quad (3)$$

* 1959 年 11 月 9 日收到.

的根均将具有負实数部分. 如果把这些根表为 $\mathscr{H}_s = -\lambda_s + i\mu_s\ (s = 2, \cdots, n)$, 則有 $\lambda_s > 0\quad (s = 2, \cdots, n)$.

为了研究組(2)的稳定性問題, 让我們先考虑对应于組(2)的綫性齐次微分方程組的解的結构. 此方程組为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^\gamma}\sum_{\sigma=1}^{n} q_{1\sigma}(t)x_\sigma, \\ \frac{dx_s}{dt} &= \frac{1}{t^\gamma} q_{s1}(t)x_1 + \sum_{\sigma=2}^{n}\left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} q_{s\sigma}(t)\right)x_\sigma \quad (s = 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{2'}$$

巴索夫証明組(2′)有如下形式的解[2,3]:

$$x_1^{(1)} = e^{\psi(t)}(1 + v_1(t)),\ x_s^{(1)} = t^{-\gamma}e^{\psi(t)}v_s(t)\quad (s = 2, \cdots, n), \tag{4}$$

此处 $v_1(t) = t^{-[(k+1)\gamma-1]}\,w_1(t)$, $v_s(t)$ 及 $w_1(t)\quad (s = 2, \cdots, n)$ 均为 t 之有界函数,

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \gamma > 1, \\ \displaystyle\int_T^t \frac{q_{11}(t)}{t^\gamma}\,dt & \text{当 } \dfrac{1}{2} < \gamma \leqslant 1, \\ \displaystyle\int_T^t \frac{1}{t^\gamma}\left[q_{11}(t) + \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma}(t)\frac{a_\sigma^{(l)}(t)}{t^{l\gamma}}\right]dt & \text{当 } 0 < \gamma \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{5}$$

此处 k 为整数,满足不等式

$$k\gamma \leqslant 1 < (k+1)\gamma, \tag{6}$$

而 $a_\sigma^{(l)}(t)$ 为 t 之有界函数,其构造方法見論文[2,3].

从表示式(4)看到,当 $t \to +\infty$ 时 $v_1(t) \to 0$, 故总可以选取这样大的数 $t_0 \geqslant T$, 使当 $t \geqslant t_0$ 时有 $|v_1(t)| < \frac{1}{2}$. 今后将只考虑这些 t 值.

至于組(2′)的稳定性問題,已为巴索夫*解决[4].

2. 在过渡到研究被提出的問題之前,让我們先建立一些引理.

引理 1. 設扰动运动微分方程組有如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= q_{12}x_2 + \cdots + q_{1n}x_n + X_1(x_1, \cdots, x_n, t), \\ \frac{dx_s}{dt} &= r_{s1}x_2 + \cdots + r_{sn}x_n + X_s(x_1, \cdots, x_n, t), \quad (s = 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{7}$$

此处 $X_s (s = 1, \cdots, n)$ 为满足条件(L)的函数,且

$$X_s(x_1, 0, \cdots, 0, t) \equiv 0; \tag{8}$$

而 $r_{s\sigma} = p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma}q_{s\sigma}$, 其中 $\gamma > 0$, $p_{s\sigma}$ 为那样的常数,使

$$\begin{vmatrix} p_{22} - \mathscr{H} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n2} & \cdots & p_{nn} - \mathscr{H} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

的一切根均具有負实数部分者, $q_{1\sigma}, q_{s\sigma}\ (s, \sigma = 2, \cdots, n)$ 为 t 之連續函数, 当 $t \geqslant t_0$ 时

* 本文的工作,曾得到导师 В. П. Басов 的指导,作者在此表示謝意.

有界．那末，对于組(7)未被扰动运动为稳定，且組(7)确定一連續系列的駐定运动：

$$x_1 = C,\ x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

此处C为任意常数，未被扰动运动亦属于这一系列．該系列中凡充分接近于未被扰动运动的一切运动均将为稳定的．此时如果扰动充分小，任何被扰动运动均將漸近地各趋于該系列駐定运动中的一支．

証　考虑方程組

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=2}^{n} p_{s\sigma}x_\sigma, \quad (s = 2, \cdots, n) \tag{$*$}$$

由于$p_{s\sigma}$的上述性質，显然有定正的二次型$V(x_2, \cdots, x_n)$存在[1]，使根据(*)計算得来的V的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}p_{s\sigma}x_\sigma = -W(x_2, \cdots, x_n),$$

其中$W(x_2, \cdots, x_n)$为定正二次型．

現在根据(7)的第二个方程的对应綫性齐次方程計算V的全导数，得：

$$\sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}r_{s\sigma}x_\sigma = -W(x_2, \cdots, x_n) + \frac{1}{t^\gamma}\sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}q_{s\sigma}x_\sigma.$$

容易看見这是一个定負二次型[1)]，因为当t足够大时，后一个和不影响它的符号．

注意到$X_s(s = 1, \cdots, n)$滿足条件(L)及(8)，知道組(7)滿足馬尔金論文[5]中§11的定理的一切条件，于是本引理成立．

引理 2.　設有微分方程組

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{t^\alpha}X_1(x_1, \cdots, x_n, t), \quad \alpha > 1 \\ &\frac{dx_s}{dt} = \mathscr{H}_s x_s + X_s(x_1, \cdots, x_n, t), \quad (s = 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{9}$$

此处$\mathscr{H}_s = -\lambda_s + i\mu, \lambda_s > 0 \quad (s = 2, \cdots, n)$；而$X_s(x_1, \cdots, x_n, t) \quad (s = 1, \cdots, n)$具下列性質：

1°　X_s定义并連續于区域：

$$|x_s| \leqslant A, \quad t \geqslant t_0 > 1.$$

2°　在該区域中有

$$|X_s| \leqslant M \quad (M > 0), \text{ 且 } M \leqslant \lambda A, \quad \lambda = \min(\lambda_2, \cdots, \lambda_n)(s = 1, \cdots, n).$$

3°　$|X_s(x_1', \cdots, x_n', t) - X_s(x_1'', \cdots, x_n'', t)| \leqslant l\{|x_1' - x_1''| + \cdots + |x_n' - x_n''|\}$，$(s = 1, \cdots, n)$其中$|x_\sigma'| \leqslant A, |x_\sigma''| \leqslant A \quad (\sigma = 1, \cdots, n)$，$l > 0$为常数．

4°　$lnN < 1$，其中$N = \max\left(\frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\lambda}\right)$，

---

1) 在$t \geqslant t_0 > 0$之下，我們可以取更普遍的定正二次型$\bar{V} = (1 + e^{-t})V$代替V，因而得定正二次型$\bar{W} = (1 + e^{-t})W + e^{-t}V$代替$W$．于是对应的$\bar{V}$的导数为

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_s}r_{s\sigma}x_\sigma = -\bar{W} + \frac{1}{t^\gamma}\sum_{s=2}^{n}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_s}q_{s\sigma}x_\sigma$$

亦仍为定負二次型．

則組(9)有如下形式的解:

$$x_1 = c + \frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1(c, t),\ x_s = \varphi_s(c, t), \quad (s = 2, \cdots, n)$$

此处 c 为任意常数,而在区域

$$|c| < C \leqslant A\ (C > 0),\ 1 < t_0 \leqslant t$$

中函数 $\varphi_s(c, t)$ $(s = 1, \cdots, n)$ 为有界,且当 $t \to t_0$ 时,有 $\varphi_s(c, t) \to 0$ $(s = 2, \cdots, n)$.

証 取初值条件如下:

当 $t = +\infty$ 时, $x_1 = x_1^{(0)} = c$; 当 $t = t_0$ 时, $x_s = x_s^{(0)} = 0$ $(s = 2, \cdots, n)$.

于是具有这初值的微分方程組(9)相当于下列积分方程組:

$$\begin{aligned} x_1 &= c + \int_{+\infty}^{t} \frac{1}{\tau^\alpha} X_1(x_1, \cdots, x_n, \tau)\, d\tau, \\ x_s &= e^{\overline{\lambda}_s t}\int_{t_0}^{t} e^{-\overline{\lambda}_s \tau} X_s(x_1, \cdots, x_n, \tau)\, d\tau, \quad (s = 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{10}$$

按迭代法求(10)的解,得

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= c + \int_{+\infty}^{t} \frac{1}{\tau^\alpha} X_1(x_1^{(k-1)}, \cdots, x_n^{(k-1)}, \tau)\, d\tau, \\ x_s^{(k)} &= e^{\overline{\lambda}_s t}\int_{t_0}^{t} e^{-\overline{\lambda}_s \tau} X_s(x_1^{(k-1)}, \cdots, x_n^{(k-1)}, \tau)\, d\tau \quad (s = 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{11}$$

我們要証明 $x_s^{(k)}$ $(s = 1, \cdots, n)$ 在所有 $t \geqslant t_0$ 下一致收斂于极限函数 x_s $(s = 1, \cdots, n)$, 而后者满足組(10)及已給的初值条件. 为此目的,須証明級数:

$$\begin{aligned} x_1 &= c + (x_1^{(1)} - c) + (x_1^{(2)} - x_1^{(1)}) + \cdots + (x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}) + \cdots, \\ x_s &= x_s^{(1)} + (x_s^{(2)} - x_s^{(1)}) + \cdots + (x_s^{(k)} - x_s^{(k-1)}) + \cdots \quad (s = 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{12}$$

絕对一致收斂,当 $t \geqslant t_0$.

讓我們先証明在假定 $|c| < C \leqslant A$ 之下,当 t_0 相当大,使

$$|c| + \frac{M}{\alpha - 1}\cdot\frac{1}{t_0^{\alpha-1}} \leqslant A$$

时,有

$$|x_s^{(k)}| \leqslant A \quad (s = 1, \cdots, n;\ k = 1, 2, \cdots). \tag{13}$$

事实上,根据初值条件,卽知 $|x_s^{(0)}| < A$. 現在假定 $|x_s^{(k-1)}| \leqslant A$, 求証 $|x_s^{(k)}| \leqslant A$.

从(11)得估值

$$\begin{aligned} |x_1^{(k)}| &\leqslant |c| + M\left|\int_{+\infty}^{t} \frac{1}{\tau^\alpha}\, d\tau\right| = |c| + M\cdot\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{t^{\alpha-1}} \leqslant \\ &\leqslant |c| + M\cdot\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{t_0^{\alpha-1}} \leqslant A, \end{aligned}$$

$$|x_s^{(k)}| \leqslant M e^{-\lambda_s t}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_s \tau}\, d\tau = M\cdot\frac{1}{\lambda_s}(1 - e^{-\lambda_s(t-t_0)}) < \frac{M}{\lambda_s} \leqslant \frac{M}{\lambda} \leqslant A.$$
$$(s = 2, \cdots, n)$$

故在所作假定下,不等式(13)恆成立.

其次，由(11)得

$$|x_1^{(1)} - c| \leqslant \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^\alpha} |X_1(c, 0, \cdots, 0, \tau)| d\tau \leqslant M \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^\alpha} d\tau =$$

$$= M \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}} \leqslant \frac{MN}{t^{\alpha-1}},$$

$$|x_s^{(1)}| \leqslant e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} |X_s(c, 0, \cdots, 0, \tau)| d\tau \leqslant M e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} d\tau =$$

$$= \frac{M}{\lambda_s} (1 - e^{-\lambda_s (t - t_0)}) < \frac{M}{\lambda_s} \leqslant MN \quad (s = 2, \cdots, n).$$

同样，計及 $t \geqslant t_0 > 1$，得

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| \leqslant \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^\alpha} |X_1(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}, \tau) - X_1(c, 0, \cdots, 0, \tau)| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant l \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^\alpha} \{|x_1^{(1)} - c| + |x_2^{(1)}| + \cdots + |x_n^{(1)}|\} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant l \int_t^{+\infty} \frac{1}{\tau^\alpha} \left[\frac{MN}{\tau^{\alpha-1}} + (n-1) MN\right] d\tau < MlnN \int_t^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^\alpha} =$$

$$= MlnN \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}} \leqslant MlnN^2 \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}},$$

$$|x_s^{(2)} - x_s^{(1)}| \leqslant e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} |X_s(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}, \tau) - X_s(c, 0, \cdots, 0, \tau)| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant l e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} \left[\frac{MN}{\tau^{\alpha-1}} + (n-1) MN\right] d\tau <$$

$$< MlnN e^{-\lambda_s t} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s \tau} d\tau = MlnN \cdot \frac{1 - e^{-\lambda_s (t - t_0)}}{\lambda_s} <$$

$$< MlnN \cdot \frac{1}{\lambda_s} \leqslant MlnN^2 \quad (s = 2, \cdots, n).$$

应用数学归納法，可以証实当 k 为任何正整数时，下列估值成立.

$$\begin{aligned} &|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}| < Ml^{k-1} n^{k-1} N^k \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}}, \\ &|x_s^{(k)} - x_s^{(k-1)}| < Ml^{k-1} n^{k-1} N^k. \quad (s = 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{14}$$

因此，級数(12)在一切 $|c| < C$, $t \geqslant t_0$ 之下，分别以下列几何級数为其优級数：

$$c + \frac{1}{t^{\alpha-1}} [MN + MlnN^2 + \cdots + Ml^{k-1} n^{k-1} N^k + \cdots],$$

$$MN + MlnN^2 + \cdots + Ml^{k-1} n^{k-1} N^k + \cdots.$$

而当 l 充分小，使 $lnN < 1$ 时，这些級数是收斂的，所以級数(12)对于一切 $t \geqslant t_0$ (t_0 足够大，且大于 1) 为絕对一致收斂，并当 $t \geqslant t_0$ 时表示組(10)的解，因而也就是具有給定初值的組(9)的解. 从估值(14)推知，这解可写成如下形式：

$$x_1 = c + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1(c, t), \quad x_s = \varphi_s(c, t), \quad (s = 2, \cdots, n)$$

其中 $\varphi_s(c, t)$ $(s = 1, \cdots, n)$ 在区域 $|c| < C$, $t \geqslant t_0$ 中为有界，且当 $t \to t_0$ 时，有 $\varphi_s(c, t) \to 0$ $(s = 2, \cdots, n)$. 引理証毕.

現在考慮下列形式的微分方程組:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{t^\alpha}[q_{12}x_2+\cdots+q_{1n}x_n+X_1(x_1,\cdots,x_n,t)],$$

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s2}x_2+\cdots+p_{sn}x_n+\frac{1}{t^\beta}(q_{s2}x_2+\cdots+q_{sn}x_n)+ \tag{15}$$

$$+X_s(x_1,\cdots,x_n,t),\quad (s=2,\cdots,n).$$

此处 $X_s(x_1,\cdots,x_n,t)\quad(s=1,\cdots,n)$ 为满足条件(L)的函数, α,β 及 $p_{s\sigma}\quad(s,\sigma=2,\cdots,n)$ 为实常数,而且 $p_{s\sigma}$ 使方程式

$$\begin{vmatrix} p_{22}-\mathscr{H} & \cdots & p_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\mathscr{H}\end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

的根均具有負实数部分; $q_{s\sigma}\quad(s=1,\cdots,n;\sigma=2,\cdots,n)$ 为 t 的連續实函数,当一切 $t\geqslant t_0$ 时为有界.

引理 3. 如果 $\alpha>1,\ \beta>0$, 則組(15)有如下形式的解:

$$x_1=c+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1(c,t),\quad x_s=\varphi_s(c,t).\quad(s=2,\cdots,n) \tag{16}$$

此处 c 为任意常数, 函数 $\varphi_s(c,t)\quad(s=1,\cdots,n)$ 在区域 $|c|<C,\ t\geqslant t_0>1$ 中为有界,且当 $t\to t_0$ 时, $\varphi_s(c,t)\to 0\quad(s=2,\cdots,n)$.

証 首先要注意到可以把 $q_{s\sigma}$ 看成为当 $t\to+\infty$ 时趋于零. 因为如果設 α_1,β_1 是这样的数,使 $1<\alpha_1<\alpha,\ 0<\beta_1<\beta$, 便有

$$\frac{1}{t^\alpha}=\frac{1}{t^{\alpha_1}}\cdot\frac{1}{t^{\alpha-\alpha_1}},\quad \frac{1}{t^\beta}=\frac{1}{t^{\beta_1}}\cdot\frac{1}{t^{\beta-\beta_1}}.$$

如果把因子 $\frac{1}{t^{\alpha-\alpha_1}}$ 归入系数 $q_{1\sigma}$, 把 $\frac{1}{t^{\beta-\beta_1}}$ 归入系数 $q_{s\sigma}$, 則新系数

$$\bar{q}_{1\sigma}=\frac{1}{t^{\alpha-\alpha_1}}q_{1\sigma},\quad \bar{q}_{s\sigma}=\frac{1}{t^{\beta-\beta_1}}q_{s\sigma},\quad(s,\sigma=2,\cdots,n)$$

当 $t\to+\infty$ 时将趋于零,而組(15)的形式依旧,盖因 $\alpha_1>1,\ \beta_1>0$.

所以对于任意給定 $l>0$, 永远可取 t_0 足够大,使当 $t\geqslant t_0$ 时,有

$$|q_{s\sigma}|\leqslant\frac{l}{3}\quad(s=1,\cdots,n;\sigma=2,\cdots,n).$$

其次,我們只須証明本引理当(15)取下列形式时成立.

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{t^\alpha}[q_{12}x_2+\cdots+q_{1n}x_n+X_1(x_1,\cdots,x_n,t)],$$

$$\frac{dx_s}{dt}=\sigma_{s-1}x_{s-1}+\mathscr{H}_sx_s+\frac{1}{t^\beta}(q_{s2}x_2+\cdots+q_{sn}x_n)+X_s(x_1,\cdots,x_n,t), \tag{17}$$

$$(s=2,\cdots,n)$$

此处 $\mathscr{H}_s=-\lambda_s+i\mu_s\quad(\lambda_s>0)\,(s=2,\cdots,n)$ 为方程式(3)的根, σ_{s-1}或等于 1 或等于 0 (但 $\sigma_1=0$). 因为經过关于变数 $x_2,\cdots,x_n$ 的带常系数的非奇异綫性变換,永远可以把組(15)化为形式(17).

还有，我們可以变换組(17)，令

$$x_1 = y_1,\quad x_s = \xi^{n-s+1} y_s,\quad (s = 2, \cdots, n)$$

此处 ξ 为常数，如果选择 ξ 充分小，将可使变换后的方程組中，y_{s-1} 的对应系数 $\bar{\sigma}_{s-1}$ $(=\xi\sigma_{s-1})$ 为任意小，而 $q_{s\sigma}$ 及 X_s 保持原来的性质.

因此可以假定在(17)中 σ_{s-1} 满足条件：

$$|\sigma_{s-1}| \leqslant \frac{l}{3},\quad (s = 2, \cdots, n)$$

而 l 为任意給定的正数.

現在，令

$$\bar{X}_1(x_1, \cdots, x_n, t) = q_{12}x_2 + \cdots + q_{1n}x_n + X_1(x_1, \cdots, x_n, t),$$

$$\bar{X}_s(x_1, \cdots, x_n, t) = \sigma_{s-1}x_{s-1} + \frac{1}{t^\beta}(q_{s2}x_2 + \cdots + q_{sn}x_n) + $$
$$+ X_s(x_1, \cdots, x_n, t)\quad (s = 2, \cdots, n),$$

则(17)取形式

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^\alpha}\bar{X}_1(x_1, \cdots, x_n, t), \\ \frac{dx_s}{dt} &= \mathscr{H}_s x_s + \bar{X}_s(x_1, \cdots, x_n, t)\quad (s = 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{17'}$$

由于 $X_s(s = 1, \cdots, n)$ 满足条件 (L)，它按 $x_1, \cdots, x_n$ 的冪的展开式不含低于二次之項，故对应于正数 $\frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$ 总可以选取 $A > 0$ 足够小，使当

$$|x_s| \leqslant A,\quad t \geqslant t_0$$

时有

$$|X_s| \leqslant \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leqslant \frac{1}{2}\lambda A\quad (s = 2, \cdots, n).$$

此外，根据 $X_s(s = 1, \cdots, n)$ 的同样性質，对于任意給定的 $l > 0$，只要取 A 相当小，当 $t \geqslant t_0$ 及

$$|x'_\sigma| \leqslant A,\quad |x''_\sigma| \leqslant A,\quad (\sigma = 1, \cdots, n)$$

时，一定可以产生不等式

$$|X_s(x'_1, \cdots, x'_n, t) - X_s(x''_1, \cdots, x''_n, t)| \leqslant \frac{l}{3}\{|x'_1 - x''_1| + \cdots + |x'_n - x''_n|\}$$
$$(s = 1, \cdots, n).$$

注意到 $|\sigma_{s-1}| \leqslant \frac{l}{3}$，$|q_{s\sigma}| \leqslant \frac{l}{3}$，显見对应于任意給定的 $l > 0$ 可选取 $t_0 > 1$，$A > 0$，使当 $t \geqslant t_0$，$|x'_\sigma| \leqslant A$，$|x''_\sigma| \leqslant A$ 时，$\bar{X}_s$ 满足下面条件：

$$|\bar{X}_s(x'_1, \cdots, x'_n, t) - \bar{X}_s(x''_1, \cdots, x''_n, t)| \leqslant l\{|x'_1 - x''_1| + \cdots + |x'_n - x''_n|\}$$
$$(s = 1, \cdots, n).$$

現在选 l 为足够小的正数，使 $lnN < 1$，此处 $N = \max\left(\frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\lambda}\right)$，$\lambda = \min(\lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 则又有 $|\bar{X}_s| < \lambda A$，而組(17′)满足引理 2 中关于組(9)的一切条件，由此本引理得到証明.

附注 根据本引理关于 X_s $(s=1,\cdots,n)$ 的假定，易見 $\overline{X}_s(0,\cdots,0,t)\equiv 0$，且 $\overline{X}_s(c,0,\cdots 0,t)$ 对于一切 $t\geqslant t_0$ 为 c 的一致正則函数，且按 c 之冪的展开式不含低于二次之項．因此，在应用引理 2 的迭代法以証明 (17′) 有形式为 $x_1=c+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1(c,t)$，$x_s=\varphi_s(c,t)$ $(s=2,\cdots,n)$ 的解存在时，注意这一性質和級数(12)对于所有 $t\geqslant t_0$ 的絕对一致收斂性，不难証明：$\varphi_s(c,t)$ $(s=1,\cdots,n)$ 对于一切 $t\geqslant t_0$ 为 c 之一致正則函数，且可写为

$$\varphi_s(c,t)=u_s^{(2)}c^2+u_s^{(3)}c^3+\cdots \quad (s=1,\cdots,n) \tag{18}$$

此处 $u_s^{(k)}$ $(s=1,\cdots,n;\ k=2,3,\cdots)$ 当一切 $t\geqslant t_0$ 时为 t 之有界連續函数．事实上，因已知 $\varphi_s(c,t)$ 有界，故有 $|\varphi_s(c,t)|<L$，又 $\varphi_s(c,t)$ 对于一切 $t\geqslant t_0$ 为 c 之一致正則函数，故有 $|u_s^{(k)}|<\frac{L}{C^k}$ $(|c|<C)$，即 $u_s^{(k)}$ 有界．

引理 4. 如果扰动运动方程組有形式 (15)，又如果 $\alpha>1,\beta>0$，則未被扰动运动为稳定．此外，有一連續系列的有界运动(16)存在，未被扰动运动亦属于这一系列，而該系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动均为稳定．且在充分小的扰动下，任何扰动运动均将漸近地各趋于該系列有界运动中的一支．

証 取組(15)的解(16)，并在(15)中引入变换，令：

$$x_1=y_1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1(y_1,t),\quad x_s=y_s+\varphi_s(y_1,t) \quad (s=2,\cdots,n). \tag{19}$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1(y_1,t)\equiv\frac{1}{t^\alpha}\Big[q_{12}\varphi_2(y_1,t)+\cdots+q_{1n}\varphi_n(y_1,t)+$$
$$+X_1\Big(y_1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,t\Big)\Big],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_s(y_1,t)\equiv r_{s2}\varphi_2(y_1,t)+\cdots+r_{sn}\varphi_n(y_1,t)+$$
$$+X_s\Big(y_1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,t\Big),\quad (s=2,\cdots,n)$$

得新方程組：

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=\frac{1}{t^\alpha}[q_{12}y_2+\cdots+q_{1n}y_n+Y_1(y_1,\cdots,y_n,t)]\cdot\frac{1}{D},\\ \frac{dy_s}{dt}&=r_{s2}y_2+\cdots+r_{sn}y_n+Y_s(y_1,\cdots,y_n,t),\quad (s=2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{20}$$

此处 $r_{s\sigma}=p_{s\sigma}+\frac{1}{t^\beta}q_{s\sigma}$ $(s,\sigma=2,\cdots,n)$.

$$Y_1(y_1,\cdots,y_n,t)=X_1\Big(y_1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1,y_2+\varphi_2,\cdots,y_n+\varphi_n,t\Big)-$$
$$-X_1\Big(y_1+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,t\Big),$$

$$Y_s(y_1, \cdots, y_n, t) = X_s\left(y_1 + \frac{1}{t^{a-1}}\varphi_1, y_2 + \varphi_2, \cdots, y_n + \varphi_n, t\right) -$$

$$- X_s\left(y_1 + \frac{1}{t^{a-1}}\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, t\right) - \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt}, \quad (s = 2, \cdots, n)$$

$$D = 1 + \frac{1}{t^{a-1}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}.$$

由此可見　$Y_s(y_1, 0, \cdots, 0, t) \equiv 0 \quad (s = 1, \cdots, n)$.

注意到引理 3 的附注关于 $\varphi_s(y_1, t)$ $(s = 1, \cdots, n)$ 的性質(18),可写：

$$\frac{1}{D} = 1 + y_1\psi_1(y_1, t), \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_1} = y_1\psi_s(y_1, t), \quad (s = 2, \cdots, n)$$

此处 $\psi_s(y_1, t)$ $(s = 1, \cdots, n)$ 对于一切 $t \geqslant t_0$ 及 $|y_1|$ 足够小时，为 y_1 的一致正則函数.

所以(20)可写成：

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{t^a}[q_{12}y_2 + \cdots + q_{1n}y_n + \overline{Y}_1(y_1, \cdots, y_n, t)], \\ \frac{dy_s}{dt} &= r_{s2}y_2 + \cdots + r_{sn}y_n + Y_s(y_1, \cdots, y_n, t), \quad (s = 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{21}$$

此处 $\overline{Y}_1(y_1, \cdots, y_n, t) = Y_1 + [q_{12}y_2 + \cdots + q_{1n}y_n + Y_1] \cdot y_1\psi_1(y_1, t)$.

显然，$\overline{Y}_1$ 及 Y_s $(s = 2, \cdots, n)$ 对于一切 $t \geqslant t_0$ 及 $|y_s|$ $(s = 1, \cdots, n)$ 足够小时，为 $y_1, \cdots, y_n$ 的一致正則函数，其按 $y_1, \cdots, y_n$ 的冪的展开式不含低于二次之項，且

$$\overline{Y}_1(y_1, 0, \cdots, 0, t) \equiv Y_s(y_1, 0, \cdots, 0, t) \equiv 0 \quad (s = 2, \cdots, n).$$

因此，对于組(21)，引理 1 的一切条件均被滿足．由此推知(21)的未被扰动运动为稳定，且(21)有解：

$$y_1 = c, \quad y_2 = \cdots = y_n = 0 \tag{22}$$

对应于一連續系列的駐定运动，其中 c 为任意常数．未被扰动运动亦属于这一系列．該系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动均为稳定．此时，如果扰动充分小，任何被扰动运动均将漸近地各趋于該系列駐定运动的一支.

由是推知本引理論断的正确性，因为在組(15)中，对应于由表示式(22)所确定的运动是由表示式

$$x_1 = c + \frac{1}{t^{a-1}}\varphi_1(c, t), \; x_s = \varphi_s(c, t)$$

确定的有界运动.

3. 现在让我們进而考虑微分方程組(2)．永远可以假定在(2)中的函数 $X_s^{(1)}(x_1, \cdots, x_n)$ $(s = 1, \cdots, n)$ 必具备下列二性質中的一个：

1）$X_s^{(1)}(x_1, 0, \cdots, 0) \equiv 0 \quad (s = 1, \cdots, n)$,

2）$X_1^{(1)}(x_1, 0, \cdots, 0) = gx_1^m + x_1$ 的較高次項，

$X_s^{(1)}(x_1, 0, \cdots, 0) = g_s x_1^{m_s} + x_1$ 的較高次項，　$(s = 2, \cdots, n)$

其中 g 及 g_s $(s = 2, \cdots, n)$ 为常数，$g \neq 0$, $m_s \geqslant m \geqslant 2$.

因为如果这一論断不成立，则我們总可以采取李雅普諾夫的方法[1] 以变数变換达成之.

为此目的,考虑方程組

$$f_s \equiv p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s^{(1)}(x_1, \cdots, x_n) = 0 \quad (s = 2, \cdots, n). \tag{23}$$

該組方程显然为 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 所滿足,而且

$$\left.\frac{D(f_2, \cdots, f_n)}{D(x_2, \cdots, x_n)}\right|_{x_1=\cdots=x_n=0} = \begin{vmatrix} p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

因此根据隐函数定理,可以从(23)中解出 $x_2, \cdots, x_n$,表为 x_1 的函数:

$$x_2 = u_2(x_1), \cdots, x_n = u_n(x_1),$$

此处 $u_2, \cdots, u_n$ 为 x_1 的正則函数,且 $u_s(0) = 0 \quad (s = 2, \cdots, n)$.

然后,引入新变数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$. 令

$$x_1 = z_1, x_2 = u_2(z_1) + z_2, \cdots, x_n = u_n(z_1) + z_n, \tag{24}$$

并注意到 $u_s(0) = 0$ 之一性质,把 $u_s(z_1)$ 写成收斂的冪級数:

$$u_s(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_s^{(k)} z_1^k \quad (s = 2, \cdots, n),$$

于是可以把組(2)变换后的結果写成

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{t^\gamma}\sum_{\sigma=1}^{n} \bar{q}_{1\sigma}(t) z_\sigma + Z_1^{(1)}(z_1, \cdots, z_n) + \frac{1}{t^\gamma} Z_1^{(2)}(z_1, \cdots, z_n, t),$$

$$\frac{dz_s}{dt} = \frac{1}{t^\gamma}\bar{q}_{s1}(t) z_1 + \sum_{\sigma=2}^{n}\left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma}\bar{q}_{s\sigma}(t)\right) z_\sigma + Z_s^{(1)}(z_1, \cdots, z_n) +$$
$$+ \frac{1}{t^\gamma} Z_s^{(2)}(z_1, \cdots, z_n, t), \quad (s = 2, \cdots, n)$$

此处 $\bar{q}_{11}(t) = q_{11}(t) + \sum_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma}(t) \cdot a_\sigma^{(1)}, \bar{q}_{1\sigma}(t) = q_{1\sigma}(t) \quad (\sigma = 2, \cdots, n),$

$$\bar{q}_{s1}(t) = q_{s1}(t) + \sum_{\sigma=2}^{n} q_{s\sigma}(t) a_\sigma^{(1)} - a_s^{(1)}\bar{q}_{11}(t), \bar{q}_{s\sigma}(t) = q_{s\sigma}(t) - a_s^{(1)}\bar{q}_{1\sigma}(t),$$
$$(s, \sigma = 2, \cdots, n)$$

$$Z_1^{(1)}(z_1, \cdots, z_n) = X_1^{(1)}(z_1, z_2 + u_2, \cdots, z_n + u_n),$$

$$Z_1^{(2)}(z_1, \cdots, z_n, t) = X_1^{(2)}(z_1, z_2 + u_2, \cdots, z_n + u_n, t) +$$
$$+ \sum_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} a_\sigma^{(k)} z_1^k,$$

$$Z_s^{(1)}(z_1, \cdots, z_n) = X_s^{(1)}(z_1, z_2 + u_2, \cdots, z_n + u_n) - X_s^{(1)}(z_1, u_2, \cdots, u_n) -$$
$$- Z_1^{(1)}(z_1, \cdots, z_n) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k a_s^{(k)} z_1^{k-1},$$

$$Z_s^{(2)}(z_1, \cdots, z_n, t) = \sum_{\sigma=2}^{n} q_{s\sigma} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} a_\sigma^{(k)} z_1^k + X_s^{(2)}(z_1, z_2 + u_2, \cdots, z_n + u_n, t) -$$
$$- \sum_{k=2}^{\infty} k a_s^{(k)} z_1^{k-1}\left[\sum_{\sigma=1}^{n} \bar{q}_{1\sigma} z_\sigma + Z_1^{(2)}(z_1, \cdots, z_n, t)\right],$$
$$(s = 2, \cdots, n).$$

因此 $Z_s^{(1)}, Z_s^{(2)}$ $(s=1,\cdots,n)$ 关于变数 $z_1,\cdots,z_n$ 与 $X_s^{(1)}, X_s^{(2)}$ $(s=1,\cdots,n)$ 关于变数 $x_1,\cdots,x_n$ 具有同样的性質．同时有

$$Z_s^{(1)}(z_1,0,\cdots,0)=-Z_1^{(1)}(z_1,0,\cdots,0)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}ka_s^{(k)}z_1^{k-1}\quad(s=2,\cdots,n).$$

由此可見 $Z_s^{(1)}(z_1,\cdots,z_n)$ $(s=1,\cdots,n)$ 必然具备上面所要求的性質 1) 或 2)．根据变换 (24) 的性質，易見关于变数 $x_1,\cdots,x_n$ 的稳定問題相当于关于变数 $z_1,\cdots,z_n$ 的稳定問題，因此不妨假定方程組(2)中的 $X_s^{(1)}$ $(s=1,\cdots,n)$ 已具备性質 1) 或 2) 中之一个．

4. 让我們考虑組(2)的未被扰动运动的稳定問題．其中 $\gamma>1$ 的情形已为巴索夫研究过[6]．本文只討論 $0<\gamma\leqslant 1$ 的情形．

設

$$X_s^{(1)}(x_1,0,\cdots,0)\equiv 0\quad(s=1,\cdots,n).\tag{25}$$

現在在这一附加的假定下研究組(2)的未被扰动运动的稳定性．

定理 1. 如果在方程組(2)中，$0<\gamma\leqslant 1$，函数 $X_s^{(1)}$ $(s=1,\cdots,n)$ 满足条件(25)，且有

$$\sup_{t\geqslant t_0} t^{k\gamma}e^{\psi(t)}<+\infty,\tag{26}$$

此处 $\psi(t)$ 由 (5) 規定，k 由 (6) 規定$\left(\text{显然当 }\frac{1}{2}<\gamma\leqslant 1\text{ 时，}k=1\text{；当 }0<\gamma\leqslant\frac{1}{2}\text{时，}k\geqslant 2\right)$，則組(2)的未被扰动运动为漸近稳定．此外組(2)有如下形式的解：

$$\begin{aligned}x_1&=e^{\psi(t)}\left[c+\frac{1}{t^{(k+1)\gamma-1}}\Phi_1(c,t)\right],\\ x_s&=\frac{1}{t^{\gamma}}e^{\psi(t)}\Phi_s(c,t),\quad(s=2,\cdots,n)\end{aligned}\tag{27}$$

此处 c 为任意常数，在区域 $|c|\leqslant C, t\geqslant t_0$ 中，函数 $\Phi_s(c,t)$ $(s=1,\cdots,n)$ 为 c 之一致正則函数，并有 $\Phi_s(0,t)=0$ $(s=1,\cdots,n)$．

这个解确定一連續系列的有界运动，未被扰动运动亦属于这一系列，而該系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动均将为稳定．

証　已知組$(2')$有解

$$x_1^{(1)}=e^{\psi(t)}(1+v_1(t)),\quad x_s^{(1)}=t^{-\gamma}e^{\psi(t)}v_s(t),\quad(s=2,\cdots,n)\tag{4}$$

此处 $v_1(t)=t^{-[(k+1)\gamma-1]}w_1(t)$，而 $w_1(t), v_2(t),\cdots,v_n(t)$ 均为 t 之有界函数．

在(2)中作变数变换，令

$$x_1=x_1^{(1)}y_1,\quad x_s=x_s^{(1)}y_1+t^{-k\gamma}e^{\psi(t)}y_s\quad(s=2,\cdots,n).\tag{28}$$

注意到 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}$ 为 $(2')$ 的解，則在变换(28)之下，組(2)将化为：

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=\frac{1}{t^{(k+1)\gamma}}\sum_{\sigma=2}^{n}\bar{q}_{1\sigma}(t)y_\sigma+\frac{1}{t^{(k+1)\gamma}}Y_1(y_1,\cdots,y_n,t),\\ \frac{dy_s}{dt}&=r_{s2}y_2+\cdots+r_{sn}y_n+Y_s(y_1,\cdots,y_n,t),\end{aligned}\tag{29}$$

此处

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{q}_{1\sigma}(t)=\frac{q_{1\sigma}(t)}{1+v_1(t)},\ (\sigma=2,\cdots,n),\\
&r_{s\sigma}=p_{s\sigma}+\frac{1}{t^{\gamma}}\left[q_{s\sigma}(t)-\frac{v_s(t)q_{1\sigma}(t)}{t^{\gamma}(1+v_1(t))}\right],\ (\sigma\neq s;\ s,\sigma=2,\cdots,n)\\
&r_{ss}=p_{ss}+\frac{1}{t^{\gamma}}\left[q_{ss}(t)-\frac{v_s(t)q_{1s}(t)}{t^{\gamma}(1+v_1(t))}\right]+\frac{k\gamma}{t}-\frac{d\psi(t)}{dt},\\
&\qquad (s=2,\cdots,n)\\
&Y_1(y_1,\cdots,y_n,t)=\frac{e^{-\psi(t)}}{1+v_1(t)}\left(t^{(k+1)\gamma}X_1^{(1)}+t^{k\gamma}X_1^{(2)}\right),\\
&Y_s(y_1,\cdots,y_n,t)=e^{-\psi(t)}t^{k\gamma}\left(X_s^{(1)}+\frac{1}{t^{\gamma}}X_s^{(2)}\right)-\frac{v_s(t)}{t^{2\gamma}}Y_1,\\
&\qquad (s=2,\cdots,n)
\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

而其中 $X_s^{(j)}$ $(s=1,\cdots,n;\ j=1,2)$ 均假設以变数 $y_1,\cdots,y_n$ 表示之.

从(29)及(30)見到,如果把(29)和引理 4 中的方程組(15)比較,显見此处有 $\beta=\gamma>0$, $\alpha=(k+1)\gamma>1$.

再从条件

$$X_s^{(1)}(x_1,0,\cdots,0)\equiv 0,\quad (s=1,\cdots,n)\tag{25}$$

及变换(28)推知在附加条件

$$\sup_{t\geqslant t_0} t^{k\gamma}e^{\psi(t)}<+\infty\tag{26}$$

之下,函数 $Y_s(y_1,\cdots,y_n,t)$ $(s=1,\cdots,n)$ 滿足条件(L).

事实上,根据 $X_s^{(1)}(0,\cdots,0)\equiv 0$ 及 $X_s^{(2)}(0,\cdots,0,t)\equiv 0$, 首先推知有:

$$Y_s(0,\cdots,0,t)\equiv 0\quad (s=1,\cdots,n).$$

其次,由(4)与(28)得:

$$x_1=e^{\psi(t)}(1+v_1)y_1,\ x_s=e^{\psi(t)}(t^{-\gamma}v_sy_1+t^{-k\gamma}y_s)\quad (s=2,\cdots,n).\tag{*}$$

用(*)来計算 $Y_1(y_1,\cdots,y_n,t)$, 即用(*)代入(30)中 $Y_1(y_1,\cdots,y_n,t)$ 右边的 $X_1^{(1)}$ 及 $X_1^{(2)}$. 根据它們的性質(25), 把代入后的結果按 $y_1,\cdots,y_n$ 的冪展开, 易見 $Y_1(y_1,\cdots,y_n,t)$ 的展开式的系数只能有下列二种形式:

$$t^{l\gamma}e^{h\psi(t)}P(t),\ \frac{1}{t^{a\gamma}}e^{b\psi(t)}Q(t),$$

此处 $P(t)$, $Q(t)$ 当 $t\geqslant t_0$ 为 t 之有界函数,而 l, h, a, b 为整数,且有:

$$0\leqslant l\leqslant k,\ h\geqslant 1,\ a>0,\ b\geqslant 1.$$

由于 $\sup\limits_{t\geqslant t_0} t^{k\gamma}e^{\psi(t)}<+\infty$, 故 $Y_1(y_1,\cdots,y_n,t)$ 按 $y_1,\cdots,y_n$ 之冪的展开式的系数当 $t\geqslant t_0$ 时均为有界函数.

因此 $Y_1(y_1,\cdots,y_n,t)$ 滿足条件(L). 至于 $Y_s(s=2,\cdots,n)$ 显然亦同样滿足条件(L). 故在附加条件(26)的保証下,組(29)滿足引理 4 的一切条件, 于是未被扰动运动关于变数 $y_1,\cdots,y_n$ 为稳定,因而关于变数 $x_1,\cdots,x_n$ 亦为稳定. 再根据条件 $\sup\limits_{t\geqslant t_0} t^{k\gamma}e^{\psi(t)}<+\infty$, 推知 $\lim\limits_{t\to\infty}e^{\psi(t)}=0$, 因此,由变换(28)得知 $t\to+\infty$ 时, $x_s\to 0$ $(s=1,\cdots,n)$, 故組(2)的未被扰动运动为漸近稳定.

此外，从引理 4 得知組(29)有解

$$y_1 = c + \frac{1}{t^{(k+1)\gamma-1}}\varphi_1(c, t),$$

$$y_s = \varphi_s(c, t) \quad (s = 2, \cdots, n).$$

于是对应地組(2)有解

$$x_1 = e^{\psi(t)}\left(1 + \frac{w_1(t)}{t^{(k+1)\gamma-1}}\right)\left(c + \frac{1}{t^{(k+1)\gamma-1}}\varphi_1(c, t)\right),$$

$$x_s = e^{\psi(t)}\frac{v_s(t)}{t^\gamma}\left[c + \frac{1}{t^{(k+1)\gamma-1}}\varphi_1(c, t)\right] + \frac{e^{\psi(t)}}{t^{k\gamma}}\varphi_s(c, t), \quad (s = 2, \cdots, n)$$

或写成

$$x_1 = e^{\psi(t)}\left[c + \frac{1}{t^{(k+1)\gamma-1}}\Phi_1(c, t)\right],$$

$$x_s = \frac{1}{t^\gamma}e^{\psi(t)}\Phi_s(c, t), \quad (s = 2, \cdots, n) \tag{27}$$

此处 $\Phi_s(c, t) \quad (s = 1, \cdots, n)$ 在区域 $|c| < C,\ t \geqslant t_0$ 中为 c 之一致正則函数，并有 $\Phi_s(0, t) = 0 \quad (s = 1, \cdots, n)$.

解(27)确定一个連續系列的有界运动，未被扰动运动亦属于这系列．而該系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动亦均为稳定.

附注　定理 1 关于稳定部分的論断，也可以应用加維里洛夫所建立的方法[7]为基础証明之，这里暂不論証.

5. 現在討論下面的情形：

$$\begin{aligned} X_1^{(1)}(x_1, 0, \cdots, 0) &= gx_1^m + x_1 \text{的較高次項}, \\ X_s^{(1)}(x_1, 0, \cdots, 0) &= g_s x_1^{m_s} + x_1 \text{的較高次項}, \quad (s = 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{31}$$

这里 $g \neq 0,\ m_s \geqslant m \geqslant 2$.

定理 2.　設在組(2)中，$0 < \gamma \leqslant 1$，函数 $X_s^{(1)}(x_1, \cdots, x_n) \quad (s = 1, \cdots, n)$ 滿足条件(31)．如果有附加条件：

$$m \geqslant 3 \text{ 时 } \sup_{t \geqslant t_0} t^{k\gamma}e^{\psi(t)} < +\infty \tag{32}$$

或

$$m = 2 \text{ 时 } \sup_{t \geqslant t_0} t^{(k+1)\gamma}e^{\psi(t)} < +\infty, \tag{33}$$

此处函数 $\psi(t)$ 及正整数 k 仍由(5)及(6)規定（因为 $0 < \gamma \leqslant 1$，必然 $k \geqslant 1$），則組(2)的未被扰动运动为漸近稳定．此外，組(2)确定一个連續系列的有界运动，未被扰动运动亦属于这系列．該系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动亦均为稳定.

証　象証明定理 1 时一样，仍作变换(28)，把組(2)变换为組(29)，在条件(31)之下，函数 $Y_1(y_1, \cdots, y_n, t)$ 按 $y_1, \cdots, y_n$ 之冪的展开式中，所有系数只能有下列三种形式：

$$t^{l\gamma}e^{h\psi(t)}P(t),\ \frac{1}{t^{a\gamma}}e^{b\psi(t)}Q(t) \text{ 及 } t^{(k+1)\gamma}e^{N\psi(t)}R(t),$$

此处 $P(t),\ Q(t),\ R(t)$ 当 $t \geqslant t_0$ 为有界函数，常数 l, h, a, b, N 为整数，且有：

$$0 \leqslant l \leqslant k,\ h \geqslant 1,\ a > 0,\ b \geqslant 1,$$

而

$$m \geqslant 3 \text{ 时 } N \geqslant 2,\ m = 2 \text{ 时 } N \geqslant 1.$$

显然,在条件(32)或(33)之下,当 $t \geqslant t_0$ 时,系数 $t^{l\gamma}e^{h\psi(t)}P(t)$, $\frac{1}{t^{a\gamma}}e^{b\psi(t)}Q(t)$ 均为 t 之有界函数. 至于 $t^{(k+1)\gamma}e^{N\psi(t)}R(t)$,则当条件(32)成立时,由于: $t^{(k+1)\gamma}e^{N\psi(t)} = \frac{(t^{k\gamma}e^{\psi(t)})^N}{t^{[(N-1)k-1]\gamma}}$,注意到此时 $N \geqslant 2$, 有 $(N-1)k - 1 \geqslant k - 1 \geqslant 0$, 故当 $t \geqslant t_0$ 时,$t^{(k+1)\gamma}e^{N\psi(t)}R(t)$ 亦为有界. 当条件(33)成立时, 我們有: $t^{(k+1)\gamma}e^{N\psi(t)} = \frac{(t^{(k+1)\gamma}e^{\psi(t)})^N}{t^{(N-1)(k+1)\gamma}}$,注意到此时 $N \geqslant 1$,因之 $(N-1)(k+1) \geqslant 0$, 故当 $t \geqslant t_0$ 时, $t^{(k+1)\gamma}e^{N\psi(t)}R(t)$ 亦仍为有界.

因此, 在附加条件 (32) 或 (33) 之下, 函数 $Y_1(y_1, \cdots, y_n, t)$ 滿足条件(L). 至于 $Y_s(y_1, \cdots, y_n, t)$ $(s = 2, \cdots, n)$ 显然更加如此. 故定理 1 的結論在本定理的假定下也同样成立. 定理証毕.

附注 1. 如在組(2)中函数 $X_s^{(1)}$ $(s = 1, \cdots, n)$ 滿足条件(31), 且有 $\gamma > 0$, 则当 m 为奇数而 g 为負数时,未被扰动运动亦为稳定.

証 先考慮方程組

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1^{(1)}(x_1, \cdots, x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= \sum_{\sigma=2}^{n} p_{s\sigma}x_\sigma + X_s^{(1)}(x_1, \cdots, x_n) \quad (s = 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{34}$$

根据 $p_{s\sigma}$ 使方程式(3)的一切根均具負实数部分这一性質,当 m 为奇数而 $g < 0$ 时, 显然(34)的未被扰动运动为漸近稳定[1],且有一个有界的定正函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 存在,它根据(34)計算得来的对 t 的导数

$$V_1(x_1, \cdots, x_n) \equiv \frac{\partial V}{\partial x_1}X_1^{(1)} + \sum_{s=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s^{(1)})$$

为定負函数 $\left(\left|\frac{\partial V}{\partial x_s}\right|\text{为有界}\right)$.

如果根据組(2)計算 V 的导数,則有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\left(\frac{1}{t^\gamma}\sum_{\sigma=1}^{n} q_{1\sigma}x_\sigma + X_1^{(1)} + \frac{1}{t^\gamma}X_1^{(2)}\right) + \sum_{s=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\left[\frac{1}{t^\gamma}q_{s1}x_1 + \right. \\ \left. + \sum_{\sigma=2}^{n}\left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma}q_{s\sigma}\right)x_\sigma + X_s^{(1)} + \frac{1}{t^\gamma}X_s^{(2)}\right] = V_1 + U, \end{aligned}$$

此处 $U = \frac{1}{t^\gamma}\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\left(\sum_{\sigma=1}^{n} q_{1\sigma}x_1 + X_1^{(2)}\right) + \sum_{s=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\left(\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}x_\sigma + X_s^{(2)}\right)\right]$,因而 $\lim_{t\to\infty} U = 0$. 于是 $\frac{dV}{dt} - V_1 = U$ 当 $t \to \infty$ 时一致趋于零,而 V 滿足馬尔金定理[8]的一切条件, 故(2)的未被扰动为稳定.

附注 2. 附注 1 的稳定条件不是必需的. 例如,考慮方程式:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}x + gx^3,$$

此处 $\gamma = 1$, $m = 3$, $g > 0$. 这显然不滿足附注 1 命題的条件,可是我們可以求得这方程的解为:

$$x = \pm \frac{1}{\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^2\left(\frac{1}{x_0^2} - 2gt_0\right) + 2gt\right]^{1/2}}.$$

只要取 $x_0^2 < \frac{1}{2gt_0}$，未被扰动运动为漸近稳定.

我們还可以进一步考虑：

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}x + gx^m,\ \text{整数}\ m > 2.$$

此处 $\gamma = 1$，故 $k = 1$，$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{q_{11}(t)}{t^\gamma}dt = -\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{t} = -\ln\frac{t}{t_0}$，$e^{\psi(t)} = \frac{t_0}{t}$，

$$\sup_{t \geq t_0} t^{k\gamma}e^{\psi(t)} = t_0 < +\infty.$$

故按定理 2，不論 $m > 2$ 为任何整数，g 为任何常数，未被扰动运动均为漸近稳定.

这結論也可从直接解这微分方程式得到証明，因为有：

$$x^{m-1} = \frac{(m-2)x_0^{m-1}}{t^{m-1}[(m-2) - g(m-1)x_0^{m-1}t_0] + g(m-1)t_0^{m-1}x_0^{m-1}\cdot t}.$$

参 考 文 献

[1] Ляпунов, А. М., *Общая задача об устойчивости движения*, М. Л. 1950.

[2] Басов, В. П., О решениях одного класса систем линейных дифференциальных уравнений. *ДАН, СССР*, **80**, (1951), № 3.

[3] Басов, В. П., Построение решений одного класса систем линейных дифференциальных уравнений. *Прикладная матем. и мех.*, **18** (1954) вып. 3.

[4] Басов, В. П., Необходимые и достаточные условия устойчивости решений некоторого класса систем линейных уравнений в одном сомнительном случае, *ДАН, СССР*, **81**, (1951), № 1.

[5] Малкин, И. Г., Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. *прикладная матем. и мех*, **6** (1942), № 6.

[6] Басов, В. П., Диссертация. *Исследование устойчивости движения для некоторого класса нединамических систем*, ЛГУ, Ленинград, 1949.

[7] Гаврилов, Н. И., Об устойчивости по Ляпунову нелинейных систем дифференциальных уравнений, Труды одесского государственного университета Год XCII, серия математических наук, **146** (1956), Вып. 6.

[8] Малкин, И. Г., Обобщение основной теоремы Ляпунова об устойчивости движения. *ДАН, СССР*, **18** (1938), № 3.

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМ СОМНИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Сюй Сун-цин

(*Университет им. Сунь Ят-сена*)

Резюме

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n}\left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} q_{s\sigma}(t)\right)x_\sigma + X_s^{(1)}(x_1, \cdots, x_n) + \frac{1}{t^\gamma} X_s^{(2)}(x_1, \cdots, x_n, t), \quad (1)$$

$$(s = 1, \cdots, n)$$

где γ и $p_{s\sigma}$——вещественные постоянные, причем $\gamma > 0$; $q_{s\sigma}(t)$——вещественные функции вещественной переменной t, определенные, непрерывные и ограниченные при всех $t \geqslant T > 0$; $X_s^{(1)}$——голоморфные функции переменных $x_1, \cdots, x_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, а $X_s^{(2)}$——голоморфные функции переменных $x_1, \cdots, x_n$, разложения которых имеют вид

$$X_s^{(2)} = \sum_{m_1+\cdots+m_n \geqslant 2} R_s^{(m_1\cdots m_n)} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}.$$

Коэффициенты $R_s^{(m_1\cdots m_n)}$ в этих разложениях суть непрерывные функции t, ограниченные при всех $t \geqslant T > 0$, удовлетворяющие лишь тому условию, чтобы все $X_s^{(2)}$ были голоморфные в равной степени для всех $t \geqslant T > 0$.

Цель настоящей работы заключается в исследовании устойчивости в смысле Ляпунова нулевого решения или невозмущенного движения $x_1 = \cdots = x_n = 0$ системы (1) при $t \to +\infty$ в предположении, что характеристическое уравнение, отвечающее матрице $\| p_{s\sigma} \|$ имеет один нулевой корень, а все остальные его корни обладают отрицательными вещественными частями.

При сделанных предположениях систему (1) с помощью неособенной линейной подстановки с постоянными вещественными коэффициентами всегда можно преобразовать так, чтобы имели место равенства

$$p_{s1} = p_{1s} = 0 \quad (s = 1, \cdots, n).$$

Поэтому мы можем систему (1) записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^\gamma} \sum_{\sigma=1}^{n} q_{1\sigma}(t) x_\sigma + X_1^{(1)}(x_1, \cdots, x_n) + \frac{1}{t^\gamma} X_1^{(2)}(x_1, \cdots, x_n, t), \\
\frac{dx_s}{dt} &= \frac{1}{t^\gamma} q_{s1}(t) x_1 + \sum_{\sigma=2}^{n}\left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} q_{s\sigma}(t)\right) x_\sigma + X_s^{(1)}(x_1, \cdots, x_n) + \\
&\quad + \frac{1}{t^\gamma} X_s^{(2)}(x_1, \cdots, x_n, t), \quad (s = 2, \cdots, n)
\end{aligned} \quad (2)$$

При этом характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{22} - \mathscr{H} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n2} & \cdots & p_{nn} - \mathscr{H} \end{vmatrix} = 0$$

будет иметь корни только с отрицательными вещественными частями.

В этой работе мы только рассмотрим случай $0 < \gamma \leqslant 1$. Что же касается случая $\gamma > 1$, то В. П. Басов[6] уже решил его.

Теорема 1. Если в уравнениях (2), $0 < \gamma \leqslant 1$, $X_s^{(1)}(x_1, 0, \cdots, 0) \equiv 0$ $(s = 1, \cdots, n)$ и если

$$\sup_{t \geqslant t_0} t^{k\gamma} e^{\psi(t)} < +\infty,$$

где

$$\psi(t)=\begin{cases}0 & \text{при } \gamma>1,\\ \displaystyle\int_T^t \frac{q_{11}(t)}{t^\gamma}\,dt & \text{при } \dfrac{1}{2}<\gamma\leqslant 1,\\ \displaystyle\int_T^t \frac{1}{t^\gamma}\left(q_{11}(t)+\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma}(t)\,\frac{a_\sigma^{(l)}(t)}{t^{l\gamma}}\right)dt & \text{при } 0<\gamma\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

k——целое число, удовлетворяющее неравенству

$$k\gamma\leqslant 1<(k+1)\gamma$$

а $a_\sigma^{(l)}(t)$——ограниченные функции t, способ построения которых указан в работах[2,3], то невозмущенное движение системы (2) асимптотическое устойчиво. Кроме того, уравнения (2) имеют решение вида

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\psi(t)}[c+t^{-(k+1)\gamma+1}\Phi_1(c,t)],\\ x_s &= t^{-\gamma}e^{\psi(t)}\Phi_s(c,t), \quad (s=2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{$*$}$$

где c——произвольная постоянная, а $\Phi_s(c,t)$ $(s=1,\cdots,n)$ голоморфные функции c в равной степени для всех $t\geqslant t_0\geqslant T$ при $|c|\leqslant C$, причем $\Phi_s(0,t)=0$ $(s=1,\cdots,n)$.

Это решение определяет непрерывный ряд ограниченных движений заключающий в себе и невозмущенное движение Все движения этого ряда, достаточно близкие к невозмущенному, будут устойчивы.

Теорема 2. Если в уравнениях (2), $0<\gamma\leqslant 1$,

$$X_1^{(1)}(x_1,0,\cdots,0)=gx_1^m+\text{члены высших измерений отно. } x_1,$$
$$X_s^{(1)}(x_1,0,\cdots,0)=g_sx_1^{m_s}+\text{члены высших измерений отно. } x_1,$$
$$(s=2,\cdots,n)$$

где $g\neq 0$, $m_s\geqslant m\geqslant 2$ и если

$$\text{либо } \sup_{t\geqslant t_0} t^{k\gamma}e^{\psi(t)}<+\infty \quad \text{при } m\geqslant 3,$$
$$\text{либо } \sup_{t\geqslant t_0} t^{(k+1)\gamma}e^{\psi(t)}<+\infty \quad \text{при } m=2,$$

то невозмущенное движение системы (2) асимптотическое устойчиво. Кроме того, уравнения (2) тоже имеют решение вида ($*$).

Автор признателен В. П. Басову за ряд ценных советов при выполнении этой работы.

第10卷 第2期　　数 学 学 报　　Vol. 10, No. 2
1960 年 6 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　June, 1960

表整数为素数及殆素数之和
——条件結果——

王　　元
(中国科学院数学研究所)

§ 1

本文将詳細証明在广义 Riemann 猜测之下，所获得的一些結果（見 [1][2]）先将广义 Riemann 猜測述于下：

(R) 所有的 Dirichlet L-函数 $L(s, \chi)$ 的零点的实数部分皆 $\leqslant \frac{1}{2}$.

由 (R) 立刻可以推出[3].

(R*) 当 $(l, k) = 1$ 时，

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l (\mathrm{mod}\ k)}} 1 = \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(k)} + O(x^{\frac{1}{2}} \log x),$$

此处 $\mathrm{li}\, x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$.

現在将本文的結果詳述于后：

定理 1. 在猜想 (R*) 之下，每一充分大的偶数可以表为一个素数及一个不超过 3 个素数的乘积之和.

定理 2. 在猜想 (R*) 之下，存在无穷多个素数 p，使 $p + 2k$ 为不超过 3 个素数的乘积，此处 k 为一个固定的正整数.

定理 3. 在猜測 (R*) 之下，每一大奇数可以表为一个素数及二倍一个素因子不超过 3 的殆素数之和.

定理 4. 命 k 为一固定偶数；$Z_k(x)$ 表示不超 x 的孿生素数对 $(p, p + 2k)$（即 p 与 $p + 2k$ 皆为素数）的个数．則

$$Z_k(x) \leqslant 8 \prod_{\substack{p | 2k \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x \log\log x}\right).$$

定理 1, 2, 3 分别改进了作者[4]与 А. И. Виноградов[5] 独立地在同样的假定下，所获得的結果；将定理中的 3 换为 4 即为我們原来的結果.

又将 $\pi(x; k, l)$ 换为

$$P(x; k, l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l (\mathrm{mod}\ k)}} e^{-\frac{p \log x}{x}} \log p,$$

則 (R) 可以換下面較弱的猜想 (R₁)，定理 1, 2, 3 仍能得到.

(R_1) 命 χ 为模 D 的特征. 則 $L(s,\chi)$ 在下面的区域內无零点

$$|t| \leqslant \log^3 D,\ \sigma > \frac{1}{2} \quad (s = \sigma + it).$$

这些都是熟知的,我們仅提一下,不贅述了.

本文中的 $p, p', p'', \cdots; p_1, p_2, \cdots$ 都表示素数.

§ 2

引 1. 若 $x \geqslant 1, z \geqslant 1$, 則

$$\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant z \\ (n,x)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(x)}{x} \log z + O(\log\log 3x).$$

証明見[4].

引 2. 命 $f(k) = \varphi(k) \prod_{p|k} \frac{p-2}{p-1}$. 若 $1 \leqslant z \leqslant x, 1 \leqslant y \leqslant x$, 則

$$\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant z \\ (k,2y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} = \frac{1}{2} \prod_{\substack{p|y \\ p>2}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) \log z + O(\log\log 3x).$$

証. 命 $\psi(q) = \prod_{p|q} (p-2)$, 則

$$\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant z \\ (k,2y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant z \\ (k,2y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant z \\ (k,2y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \sum_{q|k} \frac{1}{\psi(q)} =$$

$$= \sum_{\substack{q \leqslant z \\ (q,2y)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)\psi(q)} \sum_{\substack{t \leqslant z/q \\ (t,2qy)=1}} \frac{\mu^2(t)}{\varphi(t)} =$$

$$= \sum_{\substack{q \leqslant z \\ (q,2y)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)\psi(q)} \left[\frac{\varphi(2qy)}{2qy} \log \frac{z}{q} + O(\log\log 6qy)\right] =$$

$$= \frac{\varphi(2y)}{2y} \sum_{\substack{q \leqslant z \\ (q,2y)=1}} \frac{\mu^2(q)}{q\psi(q)} \log z + O(\log\log 3x) =$$

$$= \frac{\varphi(2y)}{2y} \prod_{p \nmid 2y} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) \log z + O(\log\log 3x) =$$

$$= \frac{1}{2} \prod_{\substack{p|y \\ p>2}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) \log z + O(\log\log 3x).$$

引理証完.

§ 3

給予两数 $2 \leqslant y \leqslant x$. 給出一組整数

(w)　　$$a, q; a_i \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

滿足

(1)　$q \leqslant x, (a,q) = 1$; 若 $p_i | y$, 則 $a_i \equiv 0 \pmod{p_i}$, 否則

$$a_i \not\equiv 0 \pmod{p_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

此处 $2 < p_1 < \cdots < p_r \leqslant \xi$ 为不超过 ξ，且又不能整除 q 的全部素数.

命 $P_w(x, q, \xi)$ 为适合下面条件的素数 p 的个数

$$p \leqslant x,\ p \equiv a \pmod{q},\ p \not\equiv a_i \pmod{p_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant r). \tag{2}$$

由孙子定理可知同余式組

$$y \equiv a_i \pmod{p_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

在区間 $1 \leqslant y \leqslant p_1 \cdots p_r$ 内有唯一的解．記为 a^*．可知 $P_w(x, q, \xi)$ 卽为适合下面条件的素数的个数

$$p \leqslant x,\ p \equiv a \pmod{q},\ p \not\equiv a^* \pmod{p_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant r). \tag{3}$$

定理 A． 命 $c > 0$；$P = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i$，则在 (R^*) 成立之下，对于任何 (w) 皆有

$$P_w(x, q, \xi) \leqslant \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(q) \sum\limits_{\substack{1 \leqslant k \leqslant \xi^c \\ k \mid P \\ (k, y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)}} + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x \cdot \xi^{2c} \log^2 \xi\right),$$

此处 $f(k) = \varphi(k) \prod\limits_{p \mid k} \dfrac{p-2}{p-1}$.

証． 記 $g(k) = \varphi(k)^{-1}$．当 $(k, y) = 1$ 及 $k \mid P$ 时，由 (R^*) 得

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a \pmod{q} \\ p \equiv a^* \pmod{k}}} 1 = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(q)\varphi(k)} + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x\right).$$

当 $d \mid P$ 时，命

$$\lambda_d = \frac{\mu(d)}{f(d) g(d)} \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant \xi^c/d \\ (k, d)=1 \\ k \mid P \\ (k, y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} \Bigg/ \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant \xi^c \\ l \mid P \\ (l, y)=1}} \frac{\mu^2(l)}{f(l)}.$$

则

$$\begin{aligned}
P_w(x, q, \xi) &= \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a \pmod{q} \\ (p-a^*, P)=1}} 1 \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a \pmod{q}}} \Bigg(\sum_{\substack{d \mid (p-a^*, P) \\ (d, y)=1}} \lambda_d\Bigg)^2 = \\
&= \sum_{\substack{d_1 \leqslant \xi^c \\ d_1 \mid P \\ (d_1, y)=1}} \sum_{\substack{d_2 \leqslant \xi^c \\ d_2 \mid P \\ (d_2, y)=1}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a \pmod{q} \\ p \equiv a^* \left(\bmod \frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}\right)}} 1 = \\
&= \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(q)} \sum_{\substack{d_1 \leqslant \xi^c \\ d_1 \mid P \\ (d_1, y)=1}} \sum_{\substack{d_2 \leqslant \xi^c \\ d_2 \mid P \\ (d_2, y)=1}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \frac{g(d_1) g(d_2)}{g(d_1, d_2)} + O\Bigg(x^{\frac{1}{2}} \log x \Bigg(\sum_{\substack{d \leqslant \xi^c \\ d \mid P}} |\lambda_d|\Bigg)^2\Bigg) = \\
&= \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(q)} Q + R.
\end{aligned}$$

命

$$S = \sum_{\substack{l \leqslant \xi^c \\ l \mid P \\ (l, y)=1}} \frac{\mu^2(l)}{f(l)},$$

則

$$\lambda_k g(k) = \frac{1}{S} \sum_{\substack{m \leqslant \xi^c/k \\ (m,k)=1 \\ m|P \\ (m,y)=1}} \frac{\mu(k)}{f(k)} \cdot \frac{\mu^2(m)}{f(m)} = \frac{1}{S} \sum_{\substack{m \leqslant \xi^c/k \\ (m,y)=(m,k)=1 \\ m|P}} \frac{\mu(mk)\mu(m)}{f(mk)}.$$

当 $(d, y) = 1$ 时,

$$\sum_{\substack{d|k|P \\ k \leqslant \xi^c \\ (k,y)=1}} \lambda_k g(k) = \frac{1}{S} \sum_{\substack{d|k|P \\ k \leqslant \xi^c \\ (k,y)=1}} \sum_{\substack{m \leqslant \xi^c/k \\ (m,y)=(m,k)=1 \\ m|P}} \frac{\mu(mk)\mu(m)}{f(mk)} =$$

$$= \frac{1}{S} \sum_{\substack{r \leqslant \xi^c \\ r|P \\ (r,y)=1}} \frac{\mu(r)}{f(r)} \sum_{d|k|r} \mu\left(\frac{r}{k}\right) = \frac{1}{S} \cdot \frac{\mu(d)}{f(d)}.$$

故

$$Q = \sum_{\substack{d_1 \leqslant \xi^c \\ d_1|P \\ (d_1,y)=1}} \sum_{\substack{d_2 \leqslant \xi^c \\ d_2|P \\ (d_2,y)=1}} \lambda_{d_1}, \lambda_{d_2} g(d_1) g(d_2) \sum_{d|(d_1,d_2)} f(d) =$$

$$= \sum_{\substack{d \leqslant \xi^c \\ d|P \\ (d,y)=1}} f(d) \Big(\sum_{\substack{k \leqslant \xi^c \\ d|k|P \\ (k,y)=1}} \lambda_k g(k) \Big)^2 = \frac{1}{S}.$$

由于当 $d|P$ 及 $d \leqslant \xi^c$ 时,

$$|\lambda_d| \leqslant \frac{|\mu(d)|}{|f(d)g(d)|} \leqslant \prod_{p|d} \frac{p-1}{p-2} = O(\log \xi).$$

故

$$R = O(x^{\frac{1}{2}} \log x \cdot \xi^{2c} \log^2 \xi).$$

定理証完.

§ 4

命 $\xi > 2$. 当 $l < c \leqslant l+1$ 时 (l 为整数),

$$\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant \xi^c \\ n|P \\ (n,y)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant \xi^c \\ (n,2qy)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} - \sum_{\xi < p \leqslant \xi^c} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant \xi^c \\ (n,2qy)=1 \\ p|n}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} + \sum_{\substack{\xi < p < p' \\ pp' \leqslant \xi^c}} \sum_{\substack{n \leqslant \xi^c \\ pp'|n \\ (n,2qy)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} +$$

$$+ \cdots + (-1)^l \sum_{\substack{\xi < p' < \cdots < p^{(l)} \\ p' \cdots p^{(l)} \leqslant \xi^c}} \sum_{\substack{n \leqslant \xi^c \\ p' \cdots p^{(l)} | n \\ (n,2qy)=1}} \frac{|\mu(n)|}{f(n)} =$$

(4) $$= \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant \xi^c \\ (n,2qy)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} - \sum_{\substack{\xi < p \leqslant \xi^c \\ (p,qy)=1}} \frac{1}{f(p)} \sum_{\substack{n \leqslant \xi^c/p \\ (n,2pyq)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} +$$

$$+\cdots+(-1)^{l}\sum_{\substack{\xi<p'<\cdots<p^{(l)}\\ p'\cdots p^{(l)}\leqslant\xi^{c}\\ (p'\cdots p^{(l)},qy)=1}}\frac{1}{f(p')\cdots f(p^{(l)})}\sum_{\substack{n\leqslant\frac{\xi^{c}}{p'\cdots p^{(l)}}\\ (n,2p'\cdots p^{(l)}qy)=1}}\frac{\mu^{2}(n)}{f(n)}.$$

1°. 当 $3\leqslant u\leqslant 6$, $x^{\frac{1}{u}}<q\leqslant c_0x^{\frac{1}{u}}$ 时，命 $\xi=\frac{x^{\frac{1}{u}}}{\log^{12}x}$, $c=\frac{u-2}{4}<1$.

故由引2及(4)式得

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^{c}\\ n\mid P\\ (n,y)=1}}\frac{\mu^{2}(n)}{f(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant\xi^{c}\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^{2}(n)}{f(n)}=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log\xi^{c}+$$

$$+O(\log\log 3x)=$$

$$=\frac{u-2}{8u}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log x+O(\log\log 3x).$$

由定理 A 可知

$$P_w(x,q,x^{\frac{1}{u}})\leqslant P_w\left(x,q,\frac{x^{\frac{1}{u}}}{\log^{12}x}\right)\leqslant\Lambda(u)\cdot\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^{2}x}+O\left(\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)}\cdot\frac{\log\log x}{\log^{3}x}\right),\tag{5}$$

此处

$$\Lambda(u)=\frac{8u}{u-2}e^{\gamma},\ c_{qy}=e^{-\gamma}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^{2}}\right),\ \gamma\text{ 为 Euler 常数.}\tag{6}$$

2°. 当 $6\leqslant u\leqslant 13$, $x^{\frac{1}{u}}<q\leqslant c_0x^{\frac{1}{u}}$ 时，命 $\xi=\frac{x^{\frac{1}{u}}}{\log^{12}x}$, $c=\frac{u-2}{4}<3$.

由于

$$\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^{c}\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^{c}}\frac{1}{p}=O\left(\sum_{p>\xi}\frac{1}{p^{2}}\right)+O\left(\sum_{\substack{p>\xi\\ p\mid yq}}\frac{1}{p}\right)=O\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

$$\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^{c}\\ p\nmid yq}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^{c}/p\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^{2}(n)}{f(n)}-\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^{c}\\ p\nmid yq}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^{c}/p\\ (n,2pyq)=1}}\frac{\mu^{2}(n)}{f(n)}=$$

$$=O\left(\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^{c}\\ p\nmid yq}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^{c}/p\\ (n,2yq)=1\\ p\mid n}}\frac{\mu^{2}(n)}{f(n)}\right)=$$

$$=O\left(\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^{c}\\ p\nmid yq}}\frac{1}{f(p)^{2}}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^{c}/p^{2}\\ (n,3yq)=1}}\frac{\mu^{2}(n)}{f(n)}\right)=O\left(\frac{\log x}{\xi}\right).$$

故

$$\sum_{\xi<p\leqslant\xi^{c}}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^{c}/p\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^{2}(n)}{f(n)}-\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^{c}\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^{c}/p\\ (n,2pqy)=1}}\frac{\mu^{2}(n)}{f(n)}=O\left(\frac{\log x}{\xi}\right).$$

故由引 2 及(4)式得

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ n\mid P\\ (n,y)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}\geqslant\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}+O\left(\frac{\log x}{\xi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(2c-1-c\log c)\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log\xi+O(\log\log x).$$

故由定理 A 可知(5)式仍正确，但

(7) $$\Lambda(u)=\frac{2u}{\frac{u-2}{2}-1-\frac{u-2}{4}\log\frac{u-2}{4}}e^{\gamma}\quad(6\leqslant u\leqslant 13).$$

命 U 表示下面方程式的根

$$\frac{u}{4}-2+\frac{1}{2}\log\frac{u-2}{4}=0.$$

則

$$\frac{d\Lambda(u)}{du}=\Lambda'(u)\begin{cases}>0, & \text{当}\quad 13\geqslant u>U,\\ <0, & \text{当}\quad 3\leqslant u<U.\end{cases}$$

因此 $\Lambda(u)$ 在区間 $(3,U)$ 中为递減函数，而在区間 $(U,13)$ 中則为递增函数．由实际計算得

$$7.35<U<7.4.$$

§ 5

固定 $v>4$，

1°．　当 $q=x^{\frac{1}{u}}$，$2<u\leqslant\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{2}{v}}$ 时，取 $c=\dfrac{v}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{u}\right)\leqslant 1$，$\xi=\dfrac{x^{\frac{1}{v}}}{\log^{3/c}x}$．則

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ n\mid P\\ (n,y)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}=\frac{u-2}{8u}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log x+$$

$$+O(\log\log x)$$

故由定理 A 得

$$P_w(x,q,x^{\frac{1}{v}})\leqslant P_w(x,q,\xi)\leqslant\frac{8u}{u-2}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\varphi(q)\log^2 x}+$$

$$+O\left(\frac{x^{C_{qy}}\log\log x}{\varphi(q)\log^3 x}\right),$$

(8) $$=\Lambda_1(u)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x}+O\left(\frac{x^{C_{qy}}\log\log x}{\varphi(q)\log^3 x}\right),$$

此处

(9) $$\Lambda_1(u)=\frac{8u}{u-2}e^{\gamma}.$$

2°.　当 $q = x^{\frac{1}{u}}$，而

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{2}{v}} < u < \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{4}{v}} & (\text{当 } v > 8), \\ \infty & (\text{当 } v \leqslant 8), \end{cases}$$

取　$c = \frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right) \leqslant 2$，$\xi = \frac{x^{\frac{1}{u}}}{\log^3 x}$，則

$$\sum_{\substack{n \leqslant \xi^c \\ n \mid P \\ (n,y)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} = \sum_{\substack{n \leqslant \xi^c \\ (n,2qy)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} - \sum_{\xi < p \leqslant \xi^c} \frac{1}{p} \sum_{\substack{n \leqslant \xi^c/p \\ (n,2qy)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} + O\left(\frac{\log x}{\xi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2v}\left[v\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right) - 1 - \frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\log\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\right] \times$$

$$\times \prod_{\substack{p \mid qy \\ p > 2}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{p>2} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \log x + O(\log\log x).$$

故由定理 A 可知(8)式仍正确，但

$$\Lambda_1(u) = \frac{2v}{v\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right) - 1 - \frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\log\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)} e^{\gamma}. \tag{10}$$

因为

$$\Lambda_1'(u) = \frac{d}{du}\Lambda_1(u) = \begin{cases} \dfrac{-16}{(u-2)^2} < 0 & (0 < c \leqslant 1), \\ \dfrac{-\frac{v^2}{u^2}(1-\log c)}{(2c-1-c\log c)^2} < 0 & (1 < c \leqslant 2), \end{cases}$$

因此，固定 $4 < v < 8$ 时，当 $u \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{4}{v}}$ 时，$\Lambda_1(u)$ 为 u 的递减函数.

§ 6

定理 B.　在猜测 (R^*) 之下，对于任何 (w) 皆有

$$P_w(x, q, x^{\frac{1}{13}}) > 25.8096 e^{-\gamma} \prod_{\substack{p>2 \\ p \mid qy}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{x}{\varphi(q)\log^2 x} +$$

$$+ O\left(\frac{x^{Cqy}}{\log^3 x}\right),$$

此处 q 为一固定整数.

証明之前，先証明

引 3.　任意給予一組整数列整数 $r \geqslant r_1 \geqslant \cdots \geqslant r_n \geqslant 1$. 則在 ($R^*$) 成立下，对于任何 (w) 皆有

$$P_w(x, q, p_r) > \frac{E \operatorname{li} x}{\varphi(q)} - |R|,$$

此处

$$E = 1 - \sum_{\substack{\alpha \leqslant r \\ (p_\alpha, y)=1}} \frac{1}{\varphi(p_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha \leqslant r \\ (p_\alpha p_\beta, y)=1 \\ \alpha > \beta}} \sum_{\beta \leqslant r_1} \frac{1}{\varphi(p_\alpha)\varphi(p_\beta)} - \cdots -$$

$$- \overbrace{\sum_{\substack{\alpha \leqslant r \\ \alpha>\beta>\cdots>\mu \\ (p_\alpha p_\beta \cdots p_\mu, y)=1}} \sum_{\beta \leqslant r_1} \sum_{\gamma \leqslant r_2} \sum_{\delta \leqslant r_2} \cdots \sum_{\mu \leqslant r_n}}^{2n+1} \frac{1}{\varphi(p_\alpha)\cdots\varphi(p_\mu)},$$

$$R = O((1+r)(1+r_1)^2\cdots(1+r_n)^2 x^{\frac{1}{2}} \log x).$$

証. 命 $P_w(q; p_1, \cdots, p_r) = P_w(x, q, p_r)$. 特别記 $P_w(q) = \pi(x, q, a)$. 显然 $P_w(q; p_1, \cdots, p_{r-1})$ 与 $P_w(q; p_1, \cdots, p_r)$ 之差为适合下面条件的素数 p 的个数

$$p \leqslant x,\ p \equiv a_r \pmod{p_r},\ p \not\equiv a_i \pmod{p_i}\quad (1 \leqslant i \leqslant r-1),\ p \equiv a \pmod q.$$

由孙子定理可知同余式組

$$\begin{cases} y \equiv a_r \pmod{p_r}, \\ y \equiv a \pmod q \end{cases}$$

有唯一的解 a^* 适合 $1 \leqslant a^* \leqslant qp_r$. 且当 $p_r \nmid y$ 时, $(a^*, qp_r) = 1$, 否則 $(a^*, qp_r) > 1$. 因此

$$P_w(q; p_1, \cdots, p_{r-1}) - P_w(q; p_1, \cdots, p_r) = \begin{cases} = P_w(qp_r; p_1, \cdots, p_{r-1}), \text{当 } p_r \nmid y; \\ \leqslant 1, \text{当 } p_r \mid y. \end{cases}$$

(上式右端之 w 应为 w_r. 在此及以后,皆为了方便,一律記作 w), 續用此式得

$$P_w(q; p_1, \cdots, p_r) = P_w(q) - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ p_\alpha \nmid y}}^{r} P_w(qp_\alpha; p_1, \cdots, p_{\alpha-1}) - \theta r,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

連用 r 次,并引入 r_1, 则得

$$P_w(q; p_1, \cdots, p_r) \geqslant P_w(q) - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ p_\alpha \nmid y}}^{r} P_w(qp_\alpha) + \sum_{\substack{\alpha \leqslant r \\ \alpha>\beta \\ (p_\alpha p_\beta, y)=1}} \sum_{\beta \leqslant r_1} P_w(qp_\alpha p_\beta; p_1, \cdots, p_{\beta-1}) -$$

$$- \theta(r + rr_1),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

引进 $r \geqslant r_1 \geqslant \cdots \geqslant r_n \geqslant 1$, 并連用上式 n 次,注意

$$P_w(qp_\alpha \cdots p_\mu; p_1, \cdots, p_{\mu-1}) \leqslant P_w(qp_\alpha \cdots p_\mu),$$

则得

$$P_w(q; p_1, \cdots, p_r) \geqslant P_w(q) - \sum_{\substack{\alpha \leqslant r \\ (p_\alpha, y)=1}} P_w(qp_\alpha) + \sum_{\substack{\alpha \leqslant r \\ (p_\alpha p_\beta, y)=1 \\ \alpha>\beta}} \sum_{\beta \leqslant r_1} P_w(qp_\alpha p_\beta) - \cdots -$$

$$- \overbrace{\sum_{\substack{\alpha \leqslant r \\ \alpha>\beta>\cdots>\mu \\ (p_\alpha p_\beta \cdots p_\mu, y)=1}} \sum_{\beta \leqslant r_1} \cdots \sum_{\mu \leqslant r_n}}^{2n+1} P_w(qp_\alpha p_\beta \cdots p_\mu) - (1+r)(1+r_1)^2 \cdots (1+r_n)^2.$$

由于 (R^*) 成立,故得

$$P_w(q; p_1, \cdots, p_r) \geqslant \frac{E \operatorname{li} x}{\varphi(q)} - |R|.$$

引理証完。

定理 B 的証明：取 $h=\frac{55}{35}+\varepsilon$　($\varepsilon>0$ 足够小)，存在 δ_0，当 $\delta>\delta_0$ 时，

$$\begin{cases}\sum\limits_{\substack{\delta<p\leqslant\delta^h\\ p\nmid yq}}\frac{1}{\varphi(p)}<\log(h+\varepsilon)<0.452=\tau,\\ \prod\limits_{\substack{\delta<p\leqslant\delta^h\\ p\nmid yq}}\left(1-\frac{1}{\varphi(p)}\right)^{-1}<h+\varepsilon<1.572=\lambda.\end{cases}$$

命 $p_r=p_{r_1}$ 为不超过 $x^{\frac{1}{13}}$ 的最大的素数，当 $2\leqslant k\leqslant t+1$ 时，命 p_{r_k} 为不超过 $x^{\frac{1}{13h^{k-1}}}$ 的最大素数，而 $p_{r_{t+1}}$ 为具有性质 $p_{r_{t+1}}^{\frac{1}{h}}<\delta_0\leqslant p_{r_{t+1}}$ 之最小者．取 n 使 $2n>2t+r_{t+1}$．命 $r_k=r_{t+1}$　$(t+1\leqslant k\leqslant n)$．其余皆如 (4)，即得

$$P_w(x,q,x^{\frac{1}{13}})>\frac{E\,\mathrm{li}\,x}{\varphi(q)}-|R|,$$

而

$$E>(1-0.0073193)\prod_{\substack{p\leqslant x^{\frac{1}{13}}\\ p\nmid qy}}\left(1-\frac{1}{\varphi(p)}\right)>$$

$$>25.8096e^{-\gamma}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{1}{\log x}+O\left(\frac{c_{qy}}{\log^2x}\right),$$

$$R=O\left(x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{13}+\frac{2}{13h}+\frac{2}{13h^2}+\cdots}\log x\right)=O\left(x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{13}+\frac{2}{13(h-1)}}\log x\right)=O\left(\frac{x}{\log^3x}\right)$$

定理証完。

§7

定理 C₁.　命 α,β 为适合 $8>\beta>4$，$\beta\geqslant\alpha>2$ 的两数．則

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{\beta}}<p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}\\ p\nmid qy}}P_w(x,pq,x^{\frac{1}{\beta}})\leqslant\left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)}\int_\alpha^\beta\frac{\Lambda_1(u)}{u}du\right)\frac{x}{\log^2x}+O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3x}\log\log x\right),$$

此处 q 为一固定常数．

証.　命 $n=[\log x]$，$u_l=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}l$　$(0\leqslant l\leqslant n)$．則

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{\beta}}<p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}\\ p\nmid qy}}P_w(x,pq,x^{\frac{1}{\beta}})=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{l+1}}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l}}\\ p\nmid qy}}P_w\left(x,x^{\frac{\log pq}{\log x}},x^{\frac{1}{\beta}}\right)=\sum_{l=0}^{n-1}T_l.$$

而

$$T_l=\sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{l+1}}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l}}\\ p\nmid qy}}P_w\left(x,x^{\frac{\log pq}{\log x}},x^{\frac{1}{\beta}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{l+1}}} < p \leqslant x^{\frac{1}{u_l}} \\ p \nmid qy}} \Lambda_1\left(\frac{\log x}{\log qp}\right) \frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\varphi(p)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x} \log\log x \log \frac{u_{l+1}}{u_l}\right)$$

由于 $\Lambda_1(u)$ 是递减函数，且注意 $\Lambda_1\left(u + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) = \Lambda_1(u) + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$,故得

$$T_l \leqslant \Lambda_1(u_l) \frac{c_{qy}x}{\varphi(q) \log^2 x} \log \frac{u_{l+1}}{u_l} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x} \log\log x \cdot \log \frac{u_{l+1}}{u_l}\right).$$

因为

$$\sum_{l=0}^{n-1} \Lambda_1(u_l) \log \frac{u_{l+1}}{u_l} - \int_\alpha^\beta \frac{\Lambda_1(u)}{u} du \leqslant \sum_{l=0}^{n-1} (\Lambda_1(u_{l+1}) - \Lambda_1(u_l)) \max_{0 \leqslant l \leqslant n-1} \log \frac{u_{l+1}}{u_l} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

故

$$\sum_{l=0}^{n-1} T_l \leqslant \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)} \int_\alpha^\beta \frac{\Lambda_1(u)}{u} du\right) \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x} \log\log x\right).$$

定理証完.

定理 C_2. 命 $3 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 13$ 为固定的两数,则

$$P_w(x, q, x^{\frac{1}{\alpha}}) \geqslant P_w(x, q, x^{\frac{1}{\beta}}) - \frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x} \int_\alpha^\beta \frac{\Lambda(u)}{u} du + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x} \log\log x\right),$$

此处 q 为一固定的正整数.

証. 不妨假定 $\alpha < U < \beta$. 将分别求出 $P_w(x, q, x^{\frac{1}{\beta}}) - P_w(x, q, x^{\frac{1}{U}})$ 与 $P_w(x, q, x^{\frac{1}{U}}) - P_w(x, q, x^{\frac{1}{\alpha}})$.

$P_w(x, q, p_m)$ 与 $P_w(x, q, p_{m+1})$ 之差为满足下面条件的素数 p 的个数

$$p \leqslant x,\ p \not\equiv a_i (\mathrm{mod}\ p_i) \quad (i \leqslant m),\ p \equiv a_{m+1} (\mathrm{mod}\ p_{m+1}),\ p \equiv a (\mathrm{mod}\ q).$$

当 $p_{m+1} \nmid y$ 时,按定义,即为 $P_w(x, qp_{m+1}, p_m)$. 否则等于 0 或 1. 故

$$P_w(x, q, p_m) - P_w(x, q, p_{m+1}) \begin{cases} = P_w(x, qp_{m+1}, p_m), & \text{当 } p_{m+1} \nmid y, \\ \leqslant 1, & \text{当 } p_{m+1} \mid y. \end{cases}$$

将 $x^{\frac{1}{U}}$ 与 $x^{\frac{1}{\alpha}}$ 之間的素数排列如次:

$$p_t \leqslant x^{\frac{1}{U}} < p_{t+1} < \cdots < p_s \leqslant x^{\frac{1}{\alpha}} < p_{s+1}.$$

則

$$P_w(x, q, x^{\frac{1}{U}}) = P_w(x, q, x^{\frac{1}{\alpha}}) + \sum_{\substack{t \leqslant i < s \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_w(x, p_{i+1}q, p_i) + O(1).$$

命 $n = [\log x]$. $u_m = \alpha + \frac{U - \alpha}{n} m \quad (0 \leqslant m \leqslant n)$, 記

$$T = \sum_{\substack{t \leqslant i < s \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_w(x, qp_{i+1}, p_i) = \sum_{m=0}^{n-1} T_m.$$

由于 $\Lambda(u)$ 在 (α, U) 内递减，又熟知 $p_i < qp_{i+1} < 4qp_i$，故

$$T_m = \sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{m+1}}} < p_{i+1} \leqslant x^{\frac{1}{u_m}} \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_w(x, qp_{i+1}, p_i) = \sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{m+1}}} < p_{i+1} \leqslant x^{\frac{1}{u_m}} \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_w\left(x, qp_{i+1}, x^{\frac{\log p_i}{\log x}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Lambda(u_m) \frac{c_{qy} x}{\varphi(q) \log^2 x} \log \frac{u_{m+1}}{u_m} + O\left(\frac{c_{qy} x}{\log^3 x} \log \log x \log \frac{u_{m+1}}{u_m}\right).$$

由于

$$\sum_{m=0}^{n-1} \Lambda(u_m) \log \frac{u_{m+1}}{u_m} - \int_\alpha^U \frac{\Lambda(u)}{u} du = O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

故得

$$T \leqslant \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)} \int_\alpha^U \frac{\Lambda(u)}{u} du\right) \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy} x}{\log^3 x} \log \log x\right).$$

因此得到

$$P_w(x, q, x^{\frac{1}{U}}) \leqslant P_w(x, q, x^{\frac{1}{\alpha}}) + \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)} \int_\alpha^U \frac{\Lambda(u)}{u} du\right) \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy} x}{\log^3 x} \log \log x\right).$$

同理得到

$$P_w(x, q, x^{\frac{1}{\beta}}) \leqslant P_w(x, q, x^{\frac{1}{U}}) + \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)} \int_U^\beta \frac{\Lambda(u)}{u} du\right) \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy} x}{\log^3 x} \log \log x\right)$$

将上式代入，即得定理.

§ 8

命 u, v 为满足 $4 < v < 8$, $2 < u \leqslant v$ 的两数. 以 $\mathfrak{M}$ 表示适合下面条件的素数 p 的集合.

(11) $p \leqslant x$, $p \equiv a \pmod q$, $p \not\equiv a_i \pmod{p_i}$ $(i \leqslant s)$, $p \not\equiv a_{s+j} \pmod{p_{s+j}^2}$ $(j \leqslant t-s)$,

此处 $p_s \leqslant x^{\frac{1}{v}} < p_{s+1}$, $p_t \leqslant x^{\frac{1}{u}} < p_{t+1}$, q 为一固定整数.

集合 $\mathfrak{M}$ 的元素的个数，記之为 $M_w(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{u}})$.

引 4. 存在諸 (w_j)，使至少满足同余式

(12) $$p \equiv a_{s+j} \pmod{p_{s+j}} \quad (1 \leqslant j \leqslant t-s)$$

中的 l 个的 $\mathfrak{M}$ 的元素的个数不少于

$$\frac{1}{l} \sum_{\substack{j \leqslant t-s \\ p_{s+j} \nmid y}} P_{w_j}(x, qp_{s+j}, x^{\frac{1}{v}}).$$

証. $\mathfrak{M}$ 的元素，适合同余式

$$p \equiv a_{s+j} \pmod{p_{s+j}}$$

者之全体所成的集合，記之为 Γ_j. 現在来估計集合 Γ_j 的元素的个数. 当 $p_{s+j} | y$ 时，Γ_j 的元素的个数为 1 或 0. 現在假定 $p_{s+j} \nmid y$，則記同余式組

$$\begin{cases} n \equiv a_{s+j} \pmod{p_{s+j}} \\ n \equiv a \pmod q \end{cases}$$

的解为 $\tilde{a}_{s+j}$, 命

$$(w_j)\quad \tilde{a}_{s+j},\ qp_{s+j};\ a_i \quad (1 \leqslant i \leqslant t),$$

则 Γ_j 的元素的个数显然不超过 $P_{w_j}(x,\ qp_{s+j},\ x^{\frac{1}{v}})$.

如果 $\mathfrak{M}$ 的元素, 至少适合同余式 (12) 中的 l 个, 则它至少属于 l 个不同的集合 Γ_j. 因此 $\mathfrak{M}$ 中至少适合同余式(12)中的 l 个的元素的个数不超过

$$\frac{1}{l}\sum_{\substack{j\leqslant t-s\\ p_{s+j}\nmid y}} P_{w_j}(x,\ qp_{s+j},\ x^{\frac{1}{v}}).$$

引理証完.

定理 D. 最多适合同余式(12)中的 m 个的 $\mathfrak{M}$ 中的元素的个数不少于

$$P_w(x,\ q,\ x^{\frac{1}{v}}) - \frac{1}{m+1}\left(\int_u^v \Lambda_1(z)\frac{dz}{z}\right)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

証. 由于

$$P_w(x,\ q,\ x^{\frac{1}{v}}) - M_w(x,\ x^{\frac{1}{v}},\ x^{\frac{1}{u}}) = \sum_{j\leqslant t-s}\ \sum_{\substack{p\equiv a_{s+j}\,(\bmod p_{s+j}^2)\\ p\leqslant x}} 1 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant t-s}\left(\frac{x}{p_{s+j}^2}+1\right) = O(x^{\frac{1}{u}}) + O(x^{1-\frac{1}{v}}),$$

故由引 4 及定理 C, 可知最多适合同余式(12)中的 m 个的 $\mathfrak{M}$ 的元素的个数不少于

$$M_w(x,\ x^{\frac{1}{v}},\ x^{\frac{1}{u}}) - \frac{1}{m+1}\sum_{\substack{j\leqslant t-s\\ p_{s+j}\nmid y}} P_{w_j}(x,\ qp_{s+j},\ x^{\frac{1}{v}}) + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant P_w(x,\ q,\ x^{\frac{1}{v}}) - \frac{1}{m+1}\left(\int_u^v \Lambda_1(z)\frac{dz}{z}\right)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

定理証完.

§ 9

由定理 B 及定理 C_2 可知

$$P_w(x,\ q,\ x^{\frac{1}{6}}) > \left(25.8096 - \int_6^{13}\frac{\Lambda(u)}{u}du\right)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^2 x}\log\log x\right) >$$

$$> 8.4\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

(i) 命 $x = y$ 为偶数. 命

$$(\mathrm{w}_1)\quad a = 1,\ q = 2;\ a_i = x \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots)$$

故由(9)可知, 存在 x_1, 当 $x > x_1$ 时

$$P_{w_1}(x,\ 2,\ x^{\frac{1}{6}}) - \frac{1}{3}\left(\int_3^6\frac{\Lambda_1(u)}{u}du\right)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right) >$$

$$> (8.4 - 6.588)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right) >$$

$$> \frac{c_{2x}x}{\log^2 x} > 1.$$

故由定理D可知，当 $x > x_1$ 时，至少有一个素数 p 满足；$x-p$ 不能被 $\leqslant x^{\frac{1}{6}}$ 的素数整除，最多只有两个素因子适合 $x^{\frac{1}{6}} < p \leqslant x^{\frac{1}{3}}$，其他的素因子都大于 $x^{\frac{1}{3}}$. 故 $x-p$ 为不超过 3 个素数的乘积，而 $x = p + x - p$. 故得定理 1.

(ii) 命 $x = y$ 为奇数. 命

$$(w_2)\quad a = x-2,\ q = 4,\ a_i = x \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

由(9)可知，存在 x_2，当 $x > x_2$ 时

$$P_{w_2}(x, 4, x^{\frac{1}{6}}) - \frac{1}{3}\left(\int_3^6 \frac{\Lambda_1(u)}{u}\,du\right)\frac{c_{4x}x}{2\log^2 x} + O\left(\frac{c_{4x}x}{\log^3 x}\log\log x\right) > \frac{c_{4x}x}{2\log^2 x} > 1.$$

故由定理D可知，当 $x > x_2$ 时，至少有一个素数 p 满足；$\frac{x-p}{2}$ 不能被 $\leqslant x^{\frac{1}{6}}$ 的素数整除，最多只有两个素因子适合 $x^{\frac{1}{6}} < p \leqslant x^{\frac{1}{3}}$，其他素因子都 $> x^{\frac{1}{3}}$，故 $\frac{x-p}{2}$ 为不超过 3 个素数的乘积. 故得定理 3.

(iii) 命 k 为一固定整数. 命

$$(w_3)\quad a = 1.\ q = 2;\ a_i = -2k \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

由(9)可知，存在 x_3，当 $x > x_3$ 时

$$P_{w_3}(x, 2, x^{\frac{1}{6}}) - \frac{1}{3}\left(\int_3^6 \frac{\Lambda_1(u)}{u}\,du\right)\frac{c_{4k}x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right) > \frac{c_{4k}x}{\log^2 x},$$

故由定理D可知，当 $x > x_3$ 时，多于 $\frac{c_{4k}x}{\log^2 x}$ 个素数 p 满足 $p + 2k$ 为不超过 3 个素数的乘积. 故得定理 2.

又由引 2 及定理A(取 $c = 1$)可知

$$P_{w_3}\left(x, 2, \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\log^3 x}\right) \leqslant 8 \prod_{\substack{p\mid 2k\\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right),$$

由

$$Z_k(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x^{1/4}/\log^3 x\\ p+2k=p'}} 1 + \sum_{\substack{\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\log^3 x}<p\leqslant x\\ p+2k=p'}} 1 \leqslant O(x^{\frac{1}{4}}) + P_{w_3}\left(x, 2, \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\log^3 x}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 8 \prod_{\substack{p\mid 2k\\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right).$$

故得定理 4.

参 考 文 献

[1] 王元：論篩法及其若干問題. 科学記录新輯 **1** (1957), 9—11.

[2] Wang Yuan, On Sieve Methods and some of their Applications. *Scientia Sinica*, **8** (1959), 357—381.

[3] Чудаков, Н. Г., О Конечной разности для функций $\psi(x, k, l)$. *ДАН СССР, серия матем.*, **12** (1948), 31—46.

[4] 王元：表大偶数为一个素数及一个不超过四个素数的乘积之和. 数学学报, **6** (1956), 565—582.

[5] Виноградов, А. И., Применение $\zeta(s)$ к Реилету Эратосфена, *Матем. Сб;* **41** (1957), 49—80.

ON THE REPRESENTATION OF LARGE INTEGER AS A SUM OF A PRIME AND AN ALMOST PRIME

WANG YUAN
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, we shall give the details of the proofs of the conditional results which we have announced in the paper [1] and [2].

第10卷 第2期 数学学报 Vol. 10, No. 2
1960年6月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1960

$GI|M|n$ 系統中大量服务的排队过程*

徐光煇
(中国科学院数学研究所)

§1. 引言

我們知道,描述一个排队过程,需要三个因素:輸入过程,排队紀律,及服务机构. 所謂 $GI|M|n$, 就是指这样的一个排队过程,它的

i) 輸入过程, 各顧客到来的时間区間的长度 **t**[1] 相互独立、相同分布. 其分布記为 $A(t)$, 而$\int_0^\infty t dA(t) \equiv a < \infty$.

ii) 排队紀律,到来顧客按到达先后排成一列. n 个服务站中,只要有一个得空,队首顧客就首先被接受服务,即"先到先服务".

iii) 服务机构,各顧客服务时間 **v** 之間, 以及各个 **v** 与各个 **t** 之間都相互独立. **v** 按同一参数的負指数分布:

$$P\{\mathbf{v} > v\} = e^{-\frac{v}{b}},$$

其中 $b > 0$ 常数.

我們記 $\rho \equiv \frac{b}{a}$, 称为服务強度.

但是我們現在要考虑的不是通常的排队过程,而是大量服务的排队过程. 这里,我們作如下規定:当 n 个站中有一个得空时,若发現

1) 等待队长 $> S$ (S 为正整数),則立刻接受队首的 S 个顧客服务.

2) $0 <$ 等待队长 $\leqslant S$, 則立刻接受所有等待的顧客服务.

3) 等待队长 $= 0$, 則停止服务. 直到发現有一个新的顧客到来, 就立刻接受該顧客服务.

这里的一批顧客看成一个整体,該批中各个顧客同时被接受服务,也同时服务完毕.

显然,当 $S = 1$ 时,大量服务的排队过程就化归通常的排队过程.

大量服务的排队过程有着很广泛的实际意义,如水庫調度,貨物运輸中所涉及的都是大量服务的問題. 近年来有一些作者[1,2,3]考虑了 $M|G|1$ 系統中大量服务的排队过程,在服务強度 $\rho < S$ 的条件下証明了队长分布的遍历性,并对 χ^2 —分布的服务时間求出了队长平稳分布及等待时間平稳分布的 Laplace 变換. 本文所要考虑的則是 $GI|M|n$ 系統中大量服务的排队过程,利用 Kendall[6] 关于 $GI|M|n$ 系統通常排队过程的嵌入 Марков 鏈的方法,我們定义了一个大量服务排队过程中的嵌入 Марков 鏈,借助于 Марков 鏈的一般理論,我們得出队长分布遍历的充分条件,并对一般輸入分布求出队长与等待时間的

---

* 1960年1月11日收到.

1) 我們用黑体字来記随机变量.

平稳分布，以及平均队长、平均等待时間等特征数．最后，考虑了忙时长度的分布．

$GI|M|n$ 系統中的通常排队过程是我們所考虑的情形的特例，这一結論与我們的結果也是吻合的，事实上，在我們的結果中，令 $S=1$，就得到 $GI|M|n$ 系統中通常排队过程的結果[6]．

作者对于越民义教授的指导表示衷心的感謝．

§2. 队长的平稳分布

首先引入我們所考虑的大量服务排队过程的嵌入 Марков 鍊．我們說系統处于状态 i，若 1) $i>n$，則表示 n 个站都正在进行服务，同时有 $i-n$ 个顾客在等待；2) $i\leqslant n$，則表示 n 个站中有 i 个正在进行服务，而沒有等待的顾客．应該注意的是此处"状态"与每个站所服务的那批顾客中包含多少个顾客无关，而只与正在进行服务的站的个数以及正在等待的顾客数有关．

次令顾客到来瞬时所看到的系統状态为 $\mathbf{q}$，則容易証明取状态 $0, 1, 2, 3, \cdots$ 的 $\{\mathbf{q}\}$ 构成一个 Марков 鍊．

記此 Марков 鍊的轉移概率矩陣为 P，則参考通常排队过程(即 $S=1$)的情形[6]，容易証明 P 为下列 (1) 式所給出(見 168 頁)：

其中

$$[l|m]\equiv\int_0^\infty\binom{m}{l}(1-e^{-\frac{u}{b}})^l e^{-(m-l)\frac{u}{b}}\,dA(u);$$

$$\{l|n;m\}\equiv\int_0^\infty\left\{\int_0^u e^{-\frac{nU}{b}}\frac{\left(\frac{nU}{b}\right)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{n}{b}\cdot\binom{n}{l}(1-e^{-\frac{n-U}{b}})^l\cdot e^{-(n-l)\frac{u-U}{b}}\,dU\right\}dA(u);$$

$$a_l\equiv(l|n)\equiv\int_0^\infty e^{-\frac{nu}{b}}\frac{\left(\frac{nu}{b}\right)^l}{l!}\,dA(u).$$

令

$$F(z)\equiv\sum_{l=0}^\infty(l|n)z^l,$$

由于

$$\sum_{l=0}^\infty(l|n)=1,$$

故知 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 为解析函数．又因

$$\sum_{l=0}^\infty l(l|n)=\frac{na}{b}=\frac{n}{\rho},$$

故由 Abel 定理，

$$F(1-0)=1;$$

$$F'(1-0)=\frac{n}{\rho}. \tag{2}$$

定理 1. 此 Марков 鍊是不可約和非周期的．因此所有状态属于同一类，且对任意

	0	1	2	3	4	…	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	…	$n+s$	$n+s+1$	$n+s+2$	…	$n+2s$	$n+2s+1$	$n+2s+2$	…
0	$[1\mid 1]$	$[0\mid 1]$	0	0	0	…	0	0	0	0	0	…	0	0	0	…	0	0	0	…
1	$[2\mid 2]$	$[1\mid 2]$	$[0\mid 2]$	0	0	…	0	0	0	0	0	…	0	0	0	…	0	0	0	…
2	$[3\mid 3]$	$[2\mid 3]$	$[1\mid 3]$	$[0\mid 3]$	0	…	0	0	0	0	0	…	0	0	0	…	0	0	0	…
⋮																				
$n-1$	$[n\mid n]$	$[n-1\mid n]$	$[n-2\mid n]$	$[n-3\mid n]$	$[n-4\mid n]$	…	$[1\mid n]$	$(0\mid n)$	0	0	0	…	0	0	0	…	0	0	0	…
n	$\{n\mid n;1\}$	$\{n-1\mid n;1\}$	$\{n-2\mid n;1\}$	$\{n-3\mid n;1\}$	$\{n-4\mid n;1\}$	…	$\{1\mid n;1\}$	$(1\mid n)$	$(0\mid n)$	0	0	…	0	0	0	…	0	0	0	…
$n+1$	"	"	"	"	"	…	"	"	0	$(0\mid n)$	0	…	0	0	0	…	0	0	0	…
$n+2$	"	"	"	"	"	…	"	"	0	0	$(0\mid n)$	…	0	0	0	…	0	0	0	…
⋮																				
$n+s-1$	"	"	"	"	"	…	"	"	0	0	0	…	$(0\mid n)$	0	0	…	0	0	0	…
$n+s$	$\{n\mid n;2\}$	$\{n-1\mid n;2\}$	$\{n-2\mid n;2\}$	$\{n-3\mid n;2\}$	$\{n-4\mid n;2\}$	…	$\{1\mid n;2\}$	$(2\mid n)$	$(1\mid n)$	0	0	…	0	$(0\mid n)$	0	…	0	0	0	…
$n+s+1$	"	"	"	"	"	…	"	"	0	$(1\mid n)$	0	…	0	0	$(0\mid n)$	…	0	0	0	…
⋮																				
$n+2s-1$	"	"	"	"	"	…	"	"	0	0	0	…	$(1\mid n)$	0	0	…	$(0\mid n)$	0	0	…
$n+2s$	$\{n\mid n;3\}$	$\{n-1\mid n;3\}$	$\{n-2\mid n;3\}$	$\{n-3\mid n;3\}$	$\{n-4\mid n;3\}$	…	$\{1\mid n;3\}$	$(3\mid n)$	$(2\mid n)$	0	0	…	0	$(1\mid n)$	0	…	0	$(0\mid n)$	0	…
$n+2s+1$	"	"	"	"	"	…	"	"	0	$(2\mid n)$	0	…	0	0	$(1\mid n)$	…	0	0	$(0\mid n)$	…
⋮																				

(1)

i, j $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ 存在.

証　由矩陣(1)可知,任何状态 i 都能以正概率到达 $i+1$,而任何状态又都能以正概率到达 0 状态,所以此鍊为不可約的.

其次,对任何状态 i, 有 $i \to i+1 \to 0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to i$, 其中所有轉移均为正概率,所以 $p_{ii}^{(i+2)} > 0$. 但另一方面,又有 $i \to i+1 \to 1 \to 2 \to \cdots \to i$, 其中所有轉移亦均为正概率,因此又有 $p_{ii}^{(i+1)} > 0$, 而 $i+1$ 与 $i+2$ 互素,故此鍊为非周期的.

由于此鍊是不可約非周期的,据 Марков 鍊的理論[4],即知所有状态属于同一类. 且对任意 i, j 有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ 存在. 定理 1 得証.

定理 2.　当 $\rho \equiv \frac{b}{a} < nS$ 时,所有状态都是遍历的. 平稳分布为

$$\Pi \equiv \left\{\frac{\mu_0}{\sum\mu_i + \frac{1}{1-\lambda}}, \frac{\mu_1}{\sum\mu_i + \frac{1}{1-\lambda}}, \cdots, \frac{\mu_{n-1}}{\sum\mu_i + \frac{1}{1-\lambda}}, \right.$$
$$\left. \frac{1}{\sum\mu_i + \frac{1}{1-\lambda}}, \frac{\lambda}{\sum\mu_i + \frac{1}{1-\lambda}}, \frac{\lambda^2}{\sum\mu_i + \frac{1}{1-\lambda}}, \cdots\right\} \tag{3}$$

其中不写上下限的求和号都是从 0 起到 $n-1$ 止(在这以后,我們都作这种約定), λ 为下列方程在单位圓 $|z| < 1$ 内的唯一解:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{nu}{b}(1-\lambda^s)}\, dA(u) = \lambda, \tag{4}$$

而

$$\mu_r = \sum_{j=r}^{n} (-1)^{j-r}\binom{j}{r} U_j, \quad r = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{5}$$

其中

$$\begin{cases} U_j = \displaystyle\sum_{r=j+1}^{n} \frac{C_j\binom{n}{r}}{C_r(1-\varepsilon_r)} \frac{n(1+\lambda+\cdots+\lambda^{s-1})(1-\varepsilon_r) - r}{n(1-\lambda^s) - r} + \binom{n}{j}, \\ j = 0, 1, \cdots, n-1, \quad U_n = 1, \end{cases} \tag{6}$$

这里

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_k = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon_j}{1-\varepsilon_j} \qquad k = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{7}$$

而

$$\varepsilon_j = \int_0^\infty e^{-\frac{u}{b}j}\, dA(u). \tag{8}$$

証:　由于定理 1,据 Марков 鍊的理論,我們知道,为了証明遍历性,只需証明 $\exists$ 非零行向量 $X = \{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |x_i| < \infty$, 使

$$X = XP \tag{9}$$

成立.

由(9)式得

$$x_k = a_0 x_{k-1} + a_1 x_{s+k-1} + a_2 x_{2s+k-1} + \cdots, \quad k \geqslant n+1.$$

令

$$x_k = \lambda^{k-n}, \qquad k \geqslant n, \tag{10}$$

則上式化简成

$$\lambda = a_0 + a_1 \lambda^s + a_2 \lambda^{2s} + \cdots,$$

即

$$\lambda = F(\lambda^s),$$

这就是(4)式. 由(2),此式两端在 $\lambda = 1 - 0$ 处相等,而在 $\lambda = 1 - 0$ 处,左端微商为 1,右端微商为 $\frac{Sn}{\rho} > 1$, 因此∃充分小的 $\delta > 0$, 使在 $\lambda = 1-\delta \equiv r$ 处, 有 $r > F(r^s)$. 所以在 $|z| = r$ 上,有

$$|F(z^s)| \leqslant |F(r^s)| < r = |z|.$$

由 Rouché 定理,即知 $F(z^s) = z$ 在 $|z| < 1$ 内恰好有一个根,記它为 λ, 显然 $\lambda \neq 0$.

$\therefore \quad x_k = \lambda^{k-n} (k \geqslant n)$. 滿足方程組(9)中第 $n+2$ 个开始的所有方程.

再将(10)代入方程組(9)中第 2 个开始到第 $n+1$ 个为止的 n 个方程,則得 n 个未知数 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 的 n 个方程式,由于其系数行列式为 $[0|1]\cdot[0|2]\cdots[0|n-1]\cdot(0|n \neq 0$, 故可解得 $x_i = \mu_i (0 \leqslant i < n-1)$, 又由于 P 为轉移概率矩陣,行和为 1,因此所求得的 $X = \{\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{n-1}, 1, \lambda, \lambda^2, \cdots\}$ 显然滿足(9)的第一个方程式,而 $X \neq 0$, 且 $\sum |x_i| < \infty$. 这样,我們就証明了 $\rho < nS$ 的条件下系統的遍历性.

若令 $\Pi \equiv \{\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \cdots\}$ 为(3)式所定义,則由 Марков 鍊的理論,就知如此得到的 Π 的分量一定是非負的,且易知 $\sum \Pi_i = 1$, 所以这些分量就构成一个概率分布,这就是 $\mathbf{q}$ 的平稳分布.

最后剩下来的就是証明 $\mu_r (0 \leqslant r \leqslant n-1)$ 的表达式(5),这可以使用 Takács[7]的方法,令

$$U(z) \equiv \sum_{j=0}^{n} x_j z^j, \tag{11}$$

利用(9)不难証明 $U(z)$ 滿足下列积分方程:

$$\begin{aligned} U(z) = & \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{u}{b}} + z e^{-\frac{u}{b}}) U(1 - e^{-\frac{u}{b}} + z e^{-\frac{u}{b}})\, dA(u) + \\ & + (1 + \cdots + \lambda^{s-1}) \int_0^\infty dA(u) \int_0^u \left(\frac{n}{b}\right) e^{\frac{nV}{b}} \lambda^s \, (e^{-\frac{V}{b}} - e^{-\frac{u}{b}} + z e^{-\frac{u}{b}})^n \, dV - \\ & - \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{u}{b}} + z e^{-\frac{u}{b}})^{n+1} dA(u). \end{aligned} \tag{12}$$

令*

$$U_r \equiv \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r}{dz^r} U(z) \right) \bigg|_{z=1},$$

及

$$\varepsilon_r \equiv \int_0^\infty e^{-\frac{u}{b}r} \, dA(u),$$

将(12)式微分 r 次，并令 $z=1$ 即得

$$U_r=\varepsilon_r U_r+\varepsilon_r U_{r-1}+(1+\lambda+\cdots+\lambda^{s-1})\binom{n}{r}\frac{n}{n(1-\lambda^s)-r}(\varepsilon_r-\lambda)-\binom{n+1}{r}\varepsilon_r,$$

$$\therefore\ U_r=\frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}U_{r-1}+\frac{\varepsilon_r-\lambda}{1-\varepsilon_r}(1+\lambda+\cdots+\lambda^{s-1})\binom{n}{r}\frac{n}{n(1-\lambda^s)-r}-\frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\binom{n+1}{r}. \tag{13}$$

这是一組变系数的一阶綫性差分方程，我們很容易来解它(例如見[5])，只要令

$$C_0\equiv 1,$$

$$C_r\equiv\prod_{j=1}^{r}\frac{\varepsilon_j}{1-\varepsilon_j}.$$

将(13)两端除以 C_r，再对 r 从 $j+1$ 到 n 求和，并注意到 $U_n=x_n=1$，即得

$$U_j=C_j\left\{\frac{1}{C_n}-\sum_{r=j+1}^{n}\left[\frac{1}{C_r}\frac{\varepsilon_r-\lambda}{1-\varepsilon_r}(1+\lambda+\cdots+\lambda^{s-1})\binom{n}{r}\frac{n}{n(1-\lambda^s)-r}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{C_{r-1}}\binom{n+1}{r}\right]\right\},\qquad j=0,1,\cdots,n-1.$$

利用下列容易証明的等式：

$$C_j\sum_{r=j+1}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{C_r(1-\varepsilon_r)}+\binom{n}{j}=\frac{C_j}{C_n}+\sum_{r=j+1}^{n}\frac{C_j}{C_{r-1}}\binom{n+1}{r}.$$

再經过一些不难的計算，即得(6)式.

又由于

$$U_i=\sum_{r=j}^{n}\binom{r}{j}x_r,$$

$$\therefore\quad x_r=\sum_{j=r}^{n}(-1)^{j-r}\binom{j}{r}U_j,\qquad r=0,1,\cdots,n-1,$$

此即所求 $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{n-1}$，也即(5)式，定理 2 全部証毕.

現令 $\mathbf{Q}\equiv\max(\mathbf{q}-n,0)$，則 $\mathbf{Q}$ 就表示实际的队长，也即正在排队等待的顧客数，而不包括正在服务的顧客. 于是，$\mathbf{Q}$ 的平稳分布就为

$$P\{\mathbf{Q}=l\}=\begin{cases}\dfrac{\sum\mu_i+1}{\sum\mu_i+\dfrac{1}{1-\lambda}}, & l=0;\\[2ex] \dfrac{\lambda^l}{\sum\mu_i+\dfrac{1}{1-\lambda}}, & l>0,\end{cases} \tag{14}$$

$$\therefore\quad E\mathbf{Q}=\sum_{l=0}^{\infty}lP\{\mathbf{Q}=l\}=\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\cdot\frac{1}{\sum\mu_i+\dfrac{1}{1-\lambda}}.$$

§3. 等待时間的平稳分布

对系統的状态 i，定义

$$k(i) \equiv -\left[-\frac{\max(i-n+1,0)}{s}\right],$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

故当顧客到达瞬时状态为 $i(\geqslant n$, 即 $k[i]>0)$ 的条件下,其等待时間 $\boldsymbol{W}_i$ 的分布密度为

$$f_{k(i)}(W) \equiv e^{-\frac{nW}{b}} \frac{\left(\frac{nW}{b}\right)^{k(i)-1}}{(k(i)-1)!} \cdot \frac{n}{b} dW, \quad 0<W<\infty,$$

所以等待时間 $\mathbf{W}$ 的分布密度

$$f(W) \equiv \sum_{i=n}^{\infty} \Pi_i f_{k(i)}(W) = e^{-\frac{nW}{b}(1-\lambda^s)} \cdot \frac{1+\lambda+\cdots+\lambda^{s-1}}{\sum \mu_i + \frac{1}{1-\lambda}} \cdot \frac{n}{b} dW,$$

$$0<W<\infty; \tag{15}$$

而等待时間为 0 的概率是

$$P\{\mathbf{W}=0\} = \frac{\sum \mu_i}{\sum \mu_i + \frac{1}{1-\lambda}}.$$

由此卽得平均等待时間

$$\mathbf{EW} = \int_0^{\infty} W f(W)\, dW = \frac{1+\lambda+\cdots+\lambda^{s-1}}{\sum \mu_i + \frac{1}{1-\lambda}} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{1}{(1-\lambda^s)^2}.$$

这里,我們指出,当 $S=1$ 时,上述关于队长及等待时間平稳分布的結果就化归 $GI|M|n$ 系統中通常排队过程的結果[6].

§4. 忙时长度的分布

我們称服务站处于“忙时”,若至少有一个站正在进行服务. 換句話說,“忙时”就是指系統正在进行服务的时刻. 忙时的长度可用时間来度量,也可用該忙时中所服务的顧客数目 B 来度量. 我們在后一种意义下来求忙时长度的分布.

設 $t=0$ 时系統处于状态 a^*, 并設該时刻正在服务和等待的顧客数目为 a. (由于我們所給“状态”的定义, a^* 和 a 当然不一定相同),則容易証明

$$P\{\mathbf{B}<a\} = 0;$$

$$P\{\mathbf{B}=a\} = p_{a^*-1,0};$$

$$P\{\mathbf{B}=a+1\} = \sum_{i=1}^{a^*} p_{a^*-1,i}\, p_{i0};$$

$$P\{\mathbf{B}=a+2\} = \sum_{i=1}^{a^*} \sum_{j=1}^{i+1} p_{a^*-1,i}\, p_{ij}\, p_{j0};$$

一般地,有

$$P\{\mathbf{B}=a+k\} = \sum_{i_1=1}^{a^*} \sum_{i_2=1}^{i_1+1} \cdots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}+1} p_{a^*-1,i_1}\, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} i_k}\, p_{i_k 0}, \quad k=1,2\cdots,$$

其中 p_{ij} 都是轉移概率矩陣 P（(1)式)的元素.

在統計平衡时,更有

$$P\{\mathbf{B} < a\} = 0,$$

$$P\{\mathbf{B} = a\} = \Pi_0.$$

$$P\{\mathbf{B} = a + k\} = \Pi_0 \sum_{i_1=1}^{a^*} \Pi_{i_1} \sum_{i_2=1}^{i_1+1} \Pi_{i_2} \cdots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}+1} \Pi_{i_k}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中 Π_i 为(3)所示向量 Π 的分量.

这就是我們所求的結果.

参　考　文　献

[1] Bailey, N. T. J., On queueing processes with bulk service. *J. R. Stat. Soc.*, B, **16** (1954), 80—87.

[2] Downton, F., Waiting time in bulk service queues. *J. R. Stat. Soc.* B, **17** (1955), 256—261.

[3] Downton, F., On limiting distributions arising in bulk service queues. *J. R. Stat. Soc.* B, **18** (1956) 265—274.

[4] Feller, W., *An introduction to probability theory and its applications*, **1** (1957), 2nd ed. John Wiley and Sons, Inc.

[5] Jordan, Ch., *Calculus of finite differences*, Budapest 1939.

[6] Kendall, D. G., Stochastic processes occuring in the theory of queues. *Ann. Math. Stat.*, **24** (1953), 338—354.

[7] Takács, L., On stochastic Process concerning some waiting time problems. *Теория вероятностей и её применения*, **2** (1957), 92—105.

ON THE QUEUEING PROCESSES IN THE SYSTEM $GI/M/n$ WITH BULK SERVICE

Shyu Kwang-huei

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

Abstract

This paper concerns with the queueing process $GI/M/n$ with bulk service. By the use of the embedded Markov chain method introduced by Kendall[6], we prove that the Markov chain associated with this queueing process is irreducible and aperiodic.

Let the mean inter-arrival time and mean service time be a and b respectively, and let the maximum number of a batch of customers being served in a single counter be S. We prove that if $\frac{b}{a} < nS$, then the system is ergodic. The stationary distributions of the queue length and waiting time are also found.

Finally, we obtain the distribution of the length of a busy period in terms of the number of participating customers.

Particularly, if $S = 1$, our results are conform with that obtained by Kendall[6].

第10卷 第2期　　数 学 学 报　　Vol. 10, No. 2
1960 年 6 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　June, 1960

关于排队过程 $GI/E_k/1$ 的若干結果*

吳　方
(中国科学院数学研究所)

§1. 引　　言

采用 Kendall[1] 的記号,所謂 $GI/E_k/1$ 是指由下述条件規定的一个排队过程:

(i) 若用 t_n 表第 n 个顧客来到服务系統的时刻，而用 $u_i = t_i - t_{i-1}$ 表示相継两顧客到达时刻間的間隔(簡称到达間隔),則这些 u 互相独立,幷且服从同一分布

$$GI: \qquad A(t) = P(u_i \leqslant t) = \int_0^t dA(u), \tag{1}$$

又我們常假定

$$0 < a = \int_0^\infty u\, dA(u) < \infty; \tag{2}$$

(ii) 用 v_n 表服务系統为第 n 个顧客服务所需的时間(簡称服务时間),則 v_i 也相互独立,且与 u_i 也相互独立,又这些 v_i 都服从自由度为 $2k$ 的 χ^2 分布

$$E_k: \qquad B(t) = P(v_i \leqslant t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(k)} \left(\frac{k}{b}\right)^k e^{-vk/b} v^{k-1}\, dv, \tag{3}$$

幷且

$$0 < b = \int_0^\infty v\, dB(v) < \infty; \tag{4}$$

(iii) 服务系統由一个站組成；顧客依先到者先被服务的原則依次被服务，而系統每次只能容納一个顧客；也就是說,当系統正“忙”时(系統正为某一顧客服务),其余的顧客就必須在系統前列队等待；又我們規定顧客在被服务完毕前,不能中途离去(例如因为等得不耐煩而退出等).

在本文中,利用 Conolly[2,3] 的方法,对于排队过程 $GI/E_k/1$ 在有限时刻 t 时的队伍長度分布以及它的繁忙周期長度的分布进行了討論.

为簡单起見,假定

$$dA(u) = a(u)\, du,$$

$a(u)$ 为連續．实际上,如果无此假定，只須将文中的积分都改成 Stieltjes 积分,同样的討論与結果仍都成立.

§4 中行列式 $|A|$ 的計算是在华罗庚教授指导下获得的,特此致謝.

§2. 系 統 变 形

与 Wishart 在〔4〕中相同，我們首先根据 χ^2 分布与指数分布間的关系将問題作如下的变形.

---

* 1960 年 1 月 11 日收到.

假設服务系統由 k 个相継的服务站所組成,顧客仍以任意分布(1)来到,顧客到来后,必須在这 k 个站都对他服务完毕后才能离去,而第 i 个站为顧客服务所需的时間 ξ_i 服从指数分布

$$P(\xi_i \leqslant t) = 1 - e^{-\frac{k_t}{b}}. \tag{5}$$

服务原則仍为先到者先被服务,但現在添加如下的規定:只要有一个顧客正在系統的某一站被服务,那末其余的顧客就必須在系統前等待.因为顧客在每一站所需的服务时間都按分布[5],所以他在整个系統所需的服务时間就按分布(3).

这样变形的好处在于我們能够利用指数分布的一个众所周知的特性:即若在某一时刻,顧客正在系統的某一站被服务,那末它在这一站上还要被服务多久的分布与他已經被服务了多久无关.

对于这个变形后的系統,定义状态如下:当系統正"空閑"(既无人等待,又无人正被服务)时,定义状态为 0;若队伍长度为 i(即有一人正被服务,而其余 $i-1$ 人在等待),而第一人正在系統的第 j 站服务,則定义状态为

$$n = ik - j + 1,$$

(n 的意义为:假如不再有新的顧客到来,而欲这 i 个顧客都被服务完毕,那末他們总共还需經过 n 个站).反之,对于任何自然数 n,"系統处于状态 n"表示队伍长度为

$$i = \left[\frac{n-1}{k}\right] + 1,^*$$

而为首的顧客則正在第

$$j = k\left[\frac{n-1}{k}\right] + k - n + 1$$

站服务;又"系統处于状态 0"表示系統正空閑着.

用 $p_n(t)$ 及 $q_n(t)$ 分别表示原系統与变形后系統处于状态 n 的概率,則易見

$$\begin{cases} p_0(t) = q_0(t), \\ p_i(t) = \sum\limits_{n=(i-1)k+1}^{ik} q_n(t), \end{cases} \tag{6}$$

于是求 $p_n(t)$ 的問題就轉化而为求 $q_n(t)$ 的問題.

§ 3. $q_n(t)$ 及 $r_n(t)$

我們用 $r_n(t)\,dt$ 表示如下的复合事件的概率:

(i) 在 $(t-dt, t)$ 中有顧客到来,

(ii) 由于他的到来,系統所处状态就由 $n-k$ 轉为 n. 由定义,显然有

$$r_n(t) = 0 \quad (0 \leqslant n < k).$$

在下文中,我們将采用下列記号:

$$A(t) = \int_0^t a(u)\,du, \qquad A_c(t) = \int_t^\infty a(u)\,du = 1 - A(t),$$

* 这里 $[x]$ 表 x 的整数部分.

$$b_n(t) = e^{-\frac{k}{b}t}\left(\frac{kt}{b}\right)^n \Big/ n! \qquad \bar{b}_n(t) = 1 - \sum_{m=0}^{n-1} b_m(t),$$

$$c_n(t) = a(t)b_n(t), \qquad \bar{c}_n(t) = a(t)\,\bar{b}_n(t),$$

$$d_n(t) = A_c(t)b_n(t), \qquad \bar{d}_n(t) = A_c(t)\bar{b}_n(t).$$

显然有

$$\bar{c}_n(t) = a(t) - \sum_{m=0}^{n-1} c_m(t),\ \bar{d}_n(t) = A_c(t) - \sum_{m=0}^{n-1} d_m(t).$$

又我們常用

$$f^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

表 $f(t)$ 的 Laplace 变換,則有

$$A_c^*(z) = \frac{1 - a^*(z)}{z},$$

$$\bar{b}_n^*(z) = \frac{1}{z} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^*(z)$$

及

$$\bar{c}_n^*(z) = a^*(z) - \sum_{m=0}^{n-1} c_m^*(z),\quad \bar{d}_n^*(z) = \frac{1 - a^*(z)}{z} - \sum_{m=0}^{n-1} d_m^*(z).$$

又在下文中,需要用到下之

引理 1. 我們有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(z)x^n = a^*\left(z + \frac{k}{b}(1 - x)\right), \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^*(z)x^n = A_c^*\left(z + \frac{k}{b}(1 - x)\right) = \frac{1 - a^*\left(z + \frac{k}{b}(1 - x)\right)}{z + \frac{k}{b}(1 - x)}. \tag{8}$$

又若 $\lambda = \lambda(z)$ 为方程

$$a^*\left(z + \frac{k}{b}(1 - \lambda)\right) = \lambda^k$$

的一个 l 重根,則对任何整数 m, 都有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(z)(n + m)^{j-1}\lambda^{n+m} = (k + m)^{j-1}\lambda^{k+m*} \quad (1 \leqslant j \leqslant l), \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^*(z)(n + m)^{j-1}\lambda^{n+m} = F_{j-1}(\lambda, m) \quad (1 \leqslant j \leqslant l), \tag{10}$$

此处

$$F_0(\lambda, m) = \frac{b(1 - \lambda^k)\lambda^m}{bz + k(1 - \lambda)}, \quad F_r(\lambda, m) = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} F_{r-1}(\lambda, m). \tag{11}$$

証. 显然.

現在規定初始条件如下: 当 $t = 0$ 亦即在刚开始时,有一顧客来到,并且毋須等待立

* 我們規定 $0^0 = 1,\ 0^n = 0\ \ (n>0)$.

即进入第一站被服务(故在 $t=0$ 时,系統处于状态 k). 于是仿照 Conolly[5],易見在 $q_n(t)$ 及 $r_n(t)$ 間,存在下之关系:

$$\left.\begin{aligned} q_0(t) &= \bar{d}_k(t) + \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} r_n(s)\bar{d}_n(t-s)\,ds, \\ q_m(t) &= d_{k-m}(t) + \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} r_n(s)\,d_{n-m}(t-s)\,ds \quad (1 \leqslant m \leqslant k), \\ q_m(t) &= \int_0^t \sum_{n=m}^{\infty} r_n(s)\,d_{n-m}(t-s)\,ds \quad (m > k). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

由此作 Laplace 变换,即得

$$\left.\begin{aligned} q_0^*(z) &= \bar{d}_k^*(z) + \sum_{n=k}^{\infty} r_n^*(z)\,\bar{d}_n^*(z), \\ q_m^*(z) &= d_{k-m}^*(z) + \sum_{n=k}^{\infty} r_n^*(z)\,d_{n-m}^*(z) \quad (1 \leqslant m \leqslant k), \\ q_m^*(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} r_n^*(z)\,d_{n-m}^*(z) \quad (m > k). \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

对上面三式求和, 因为 $\sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) = 1$, 所以 $\sum_{m=0}^{\infty} q_m^*(z) = \frac{1}{z}$, 故不难算得

$$\sum_{n=k}^{\infty} r_n^*(z) = \frac{a^*(z)}{1-a^*(z)}. \tag{13}$$

于是就将求 $q_n(t)$ 或 $q_n^*(z)$ 的問題化为求 $r_n(t)$ 或 $r_n^*(z)$ 的問題.

关于 $r_n(t)$, 我們有

$$\left.\begin{aligned} r_k(t) &= \bar{c}_k(t) + \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} r_n(s)\bar{c}_n(t-s)\,ds, \\ r_{k+m}(t) &= c_{k-m}(t) + \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} r_n(s)c_{n-m}(t-s)\,ds \quad (1 \leqslant m \leqslant k), \\ r_{k+m}(t) &= \int_0^t \sum_{n=m}^{\infty} r_n(s)c_{n-m}(t-s)\,ds \quad (m > k). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这些关系的推导完全与(12)相似. 再作 Laplace 变换,可得

$$\left.\begin{aligned} r_k^*(z) &= \bar{c}_k^*(z) + \sum_{n=k}^{\infty} r_n^*(z)\bar{c}_n^*(z), \\ r_{k+m}^*(z) &= c_{k-m}^*(z) + \sum_{n=k}^{\infty} r_n^*(z)c_{n-m}^*(z) \quad (1 \leqslant m \leqslant k), \\ r_{k+m}^*(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} r_n^*(z)c_{n-m}^*(z) \quad (m > k). \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

現在我們先研究(14′)的最后一个关系,这是一个和分方程, 由和分方程的基本定理, 我們需要研究

$$a^*\left(z + \frac{k}{b}(1-\lambda)\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(z)\lambda^n = \lambda^k \quad (\Re(z) > 0) \tag{15}$$

的解. 但由(13)式可知 $\sum r_m^*(z)$ 为收敛,故只须考察上述方程在单位圆 $|\lambda|<1$ 中的解. 由 Rouché 定理易知:当 $\Re(z)>0$ 时,上述方程在 $|\lambda|<1$ 中有 k 个根(l 次重根被計算 l 次)今若以

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_h$$

表这 k 个根中之不同者,而命

$$l_1, \cdots, l_h$$

分别表示这些根的重数,则有 $l_1+\cdots+l_h=k$. 于是

$$r_{k+m}^*(z)=\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{l_i}\alpha_{ij}m^{j-1}\lambda_i^m \quad (m=1,2,\cdots), \tag{16}$$

其中 $\alpha_{ij}=\alpha_{ij}(z)$ 为 k 个待定的与 m 无关的数.

以此代入(14′)的第二个关系的 $m=k$ 的情形,利用引理,不难导出

$$r_k^*(z)=\sum_{i=1}^{h}\alpha_{i1}-1. \tag{17}$$

最后还有 $\alpha_{ij}(i=1,\cdots,h;\ j=1,\cdots,l_i)$ 倘待决定将(16)及(17)代入(13)及(14′)的第二个关系中 $m=k$ 以外的其余各式,再利用引理 1,通过計算,不难导得 k 个綫性方程

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{l_i}\alpha_{ij}\beta_{ij}^{(m)}=0 \quad (m=1,2,\cdots,k-1),\\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\alpha_{ij}f_{j-1}(\lambda_i)=\frac{1}{1-a^*(z)},\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中

$$\beta_{ij}^{(m)}=\sum_{n=0}^{k-m-1}c_n^*(z)(m+n-k)^{j-1}\lambda_i^{m+n-k} \quad (m=1,2,\cdots,k-1),$$

而

$$f_0(\lambda)=\frac{1}{1-\lambda},\ f_r(\lambda)=\lambda f_{r-1}'(\lambda) \quad (r\geqslant 1). \tag{19}$$

綫性方程組(18)也可以写成矩陣方程的形式如

$$CA\alpha'=v', \tag{18′}$$

此处 C 与 A 为二个 k 級方陣:

$$C=\begin{pmatrix} c_0^*(z) & c_1^*(z) & \cdots & c_{k-2}^*(z) & 0\\ & c_0^*(z) & \cdots & c_{k-3}^*(z) & 0\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & & c_0^*(z) & 0\\ 0 & & & & 1\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1^{1-k} & (1-k)\lambda_1^{1-k} & \cdots & (1-k)^{l_1-1}\lambda_1^{1-k} & \cdots & \lambda_h^{1-k} & \cdots & (1-k)^{l_h-1}\lambda_h^{1-k}\\ \lambda_1^{2-k} & (2-k)\lambda_1^{2-k} & \cdots & (2-k)^{l_1-1}\lambda_1^{2-k} & \cdots & \lambda_h^{2-k} & \cdots & (2-k)^{l_h-1}\lambda_h^{2-k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1^{-1} & (-1)\lambda_1^{-1} & \cdots & (-1)^{l_1-1}\lambda_1^{-1} & \cdots & \lambda_h^{-1} & \cdots & (-1)^{l_h-1}\lambda_h^{-1}\\ f_0(\lambda_1) & f_1(\lambda_1) & \cdots & f_{l_1-1}(\lambda_1) & \cdots & f_0(\lambda_h) & \cdots & f_{l_h-1}(\lambda_h)\end{pmatrix};$$

而 α' 与 v' 分别表示 k 維向量

$$\alpha = (\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1l_1}, \cdots, \alpha_{h1}, \cdots, \alpha_{hl_h})$$

与

$$v = \left(0, \cdots, 0, \frac{1}{1 - a^*(z)}\right)$$

的轉置.

由(18′)得到

$$\alpha' = A^{-1}C^{-1}v' = A^{-1}v' = \\ = \frac{1}{1 - a^*(z)} \frac{1}{|A|} (A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kk})', \tag{20}$$

其中 $|A|$ 表矩陣 A 的行列式，而 A_{ki} 則表示落在矩陣 A 中第 k 行第 i 列交叉点上元素的代数余子式. 于是我們需要求出 $|A|$ 及各个 A_{ki} 的数值.

在求出 $r_n^*(z)$ 后，以(14′)代入(12′)，幷利用引理 1 就得

定理 1. 我們有

$$\left.\begin{aligned} q_0^*(z) &= \frac{1}{z} - \sum_{m=1}^{\infty} q_m^*(z), \\ q_m^*(z) &= \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} F_{j-1}(\lambda_i, m-k) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} \sum_{n=m}^{k-1} d_{n-m}^*(z)(n-k)^{j-1}\lambda_i^{n-k} \quad (m \geqslant 1). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

§4. 求 $|A|$ 及 A_{ki}

我們注意：在 A 中与根 λ_i 对应的各列都可以通过对它前一列求导(关于 λ_ν) 再乘上 λ_ν 而得，作变换 $\lambda_\nu = e^{x_\nu}$，則与 x_ν 对应的各列就可以通过对它前一列直接求导 (关于 x_ν) 而得. 依靠这个性質，就能把 $|A|$ 及 A_{ki} 求出.

定理 2. 我們有

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda_1^{1-k} \cdots (1-k)^{l_1-1}\lambda_1^{1-k} \cdots \lambda_h^{1-k} \cdots (1-k)^{l_h-1}, \lambda_h^{1-k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{-1} \cdots (-1)^{l_1-1}\lambda_1^{-1} \quad \cdots \quad \lambda_h^{-1} \cdots (-1)^{l_h-1}\lambda_h^{-1} \\ f_0(\lambda_1) \cdots f_{l_1-1}(\lambda_1) \quad \cdots f_0(\lambda_h) \cdots f_{l_h-1}(\lambda_h) \end{vmatrix} = \prod_{\nu=1}^{h} \frac{1!\,2!\cdots(l_\nu-1)!}{(1-\lambda_\nu)^{l_\nu}} \lambda_\nu^{\frac{1}{2}l_\nu(l_\nu+1)-l_\nu k} \prod_{1\leqslant\mu<\nu\leqslant h} (\lambda_\nu - \lambda_\mu)^{l_\mu l_\nu}. \tag{22}$$

証. 不妨假設 $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_h$. 当 $l_1 = \cdots = l_h = 1$，而 $h = k$，亦卽方程 (15) 的根都是单根时，容易証明[1)]

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda_1^{1-k} & \cdots & \lambda_k^{1-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{-1} & \cdots & \lambda_k^{-1} \\ \dfrac{1}{1-\lambda_1} & \cdots & \dfrac{1}{1-\lambda_k} \end{vmatrix} = \prod_{\nu=1}^{k} \frac{\lambda_\nu^{1-k}}{1-\lambda_\nu} \prod_{1\leqslant\mu<\nu\leqslant k} (\lambda_\nu - \lambda_\mu),$$

1) 例如見 Фаддеев 与 Соминский 著的"高等代数习題"一书中的第 272 題.

此即(22)的特殊情形.

对于一般情形,我們固定 k, 并首先給与 $l_1, \cdots, l_h$ 对应的 $|A| = A(l_1, \cdots, l_h)$ 以确定的足标 $n = n(l_1, \cdots, l_h)$, 然后用数学归納法証明之. 命 $n(1, \cdots, 1) = 1$, 并規定当 $\sum_{\nu=1}^{h} (l_\nu - 1) < \sum_{\nu=1}^{h'} (l'_\nu - 1)$, 或 $\sum_{\nu=1}^{h} (l_\nu - 1) = \sum_{\nu=1}^{h'} (l'_\nu - 1)$, 但 $l_\nu = l'_\nu\ (\nu < \mu), l_\mu < l'_\mu$ 时, 有 $n(l_1, \cdots, l_h) < n(l'_1, \cdots, l'_h)$. 則当 $n = 1$ 时, 前面已經証明定理的成立.

今設 $l_1, \cdots, l_h$ 为一組适合 $l_1 \geqslant \cdots \geqslant l_h$, $l_1 + \cdots + l_h = k$ 的自然数. 若 $l_1 = 1$, 則有 $l_2 = \cdots = l_h = 1$, 定理已經証明, 若 $l_1 > 1$, 我們作变換

$$\lambda_\nu = e^{x_\nu} \quad (\nu = 1, \cdots, h),$$

則易見

$$A(l_1, \cdots, l_h) = \lim_{x \to x_1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{l_1 - 1} D(x; x_1, \cdots, x_h),$$

此处

$$D(x; x_1, \cdots, x_h) = \begin{vmatrix} e^{(1-k)x_1} \cdots (1-k)^{l_1-2} e^{(1-k)x_1} & e^{(1-k)x} & e^{(1-k)x_2} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ e^{-x_1} \quad \cdots \quad (-1)^{l_1-2} e^{-x_1} & e^{-x} & e^{-x_2} \cdots \\ f_0(e^{x_1}) \cdots \quad f_{l_1-2}(e^{x_1}) & f_0(e^x) & f_0(e^{x_2}) \cdots \end{vmatrix}.$$

因为与 $D(x; x_1, \cdots, x_n)$ 对应的足标 n 小于 $n(l_1, \cdots, l_h)$, 故根据数学归納法假設可得

$$D(x; x_1, \cdots, x_h) = \prod_{\nu=2}^{h} \frac{1!\,2!\cdots(l_\nu - 1)!}{(1 - e^{x_\nu})^{l_\nu}} e^{\left[\frac{l_\nu + 1}{2} - k\right] l_\nu x_\nu} \prod_{2 \leqslant \mu < \nu \leqslant h} (e^{x_\nu} - e^{x_\mu})^{l_\mu l_\nu} \times$$

$$\times \frac{1!\,2!\cdots(l_1 - 2)!}{(1 - e^{x_1})^{l_1 - 1}} e^{\left[\frac{l_1}{2} - k\right](l_1 - 1) x_1} \prod_{\nu=2}^{h} (e^{x_\nu} - e^{x_1})^{l_\nu (l_1 - 1)} \times$$

$$\times \frac{1}{1 - x} e^{(1-k)x} (e^x - e^{x_1})^{l_1 - 1} \prod_{\nu=2}^{h} (e^{x_\nu} - e^x)^{l_\nu}.$$

对 $D(x; x_1, \cdots, x_h)$ 求 $l_1 - 1$ 重导数(关于 x), 再令 $x \to x_1$, 就得(22)式.

对于 A_{ki} 也可用同法求之, 但我們不能得到一般的公式. 下面只就几个特殊情形列出其結果. 这些結果的获得, 可以通过上面的方法, 也可以通过其他方法 (例如依靠 Фаддеев 与 Соминский 所著“高等代数习題”书中第 281, 286 題的帮助) 算得.

(I) $h = k$, $l_1 = \cdots = l_k = 1$; 亦即方程(15)在 $|\lambda| < 1$ 中的根全是单根. 此时

$$A_{ki} = (-1)^{k+i} \begin{vmatrix} \lambda_1^{1-k} \cdots \lambda_{i-1}^{1-k} & \lambda_{i+1}^{1-k} \cdots \lambda_k^{1-k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{-1} \quad \cdots \quad \lambda_{i-1}^{-1} & \lambda_{i+1}^{-1} \quad \cdots \quad \lambda_k^{-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+i} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{k} \lambda_\nu^{1-k} \prod_{\substack{1 \leqslant \mu < \nu \leqslant k \\ \mu, \nu \neq i}} (\lambda_\nu - \lambda_\mu).$$

(II) $h = 1$, $l_1 = k$; 亦即方程(15)在 $|\lambda| < 1$ 中只有一个 k 重根. 此时

$$A_{ki} = (-1)^{k+i} \begin{vmatrix} \lambda^{1-k} \cdots (1-k)^{i-2} \lambda^{1-k} & (1-k)^{i} \lambda^{1-k} \cdots (1-k)^{k-1} \lambda^{1-k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^{-1} \cdots (-1)^{i-2} \lambda^{-1} & (-1)^{i} \lambda^{-1} \quad \cdots \quad (-1)^{k-1} \lambda^{-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+i}1!\,2!\cdots(k-2)!\,\lambda^{-\frac{k(k-1)}{2}}\sigma_{k-i},$$

其中 σ_p 表示由 $-1, -2, \cdots, -(k-1)$ 中每次取 p 个的所有可能乘积之和.

(III) $h = 2, l_1 = k-1, l_2 = 1$; 亦即方程 (15) 在 $|\lambda| < 1$ 中有一个 $k-1$ 重根及一个单根. 此时

$$A_{ki} = (-1)^{k+i}\begin{vmatrix} \lambda_1^{1-k} & \cdots & (1-k)^{i-2}\lambda_1^{1-k} & (1-k)^{i}\lambda_1^{1-k} & \cdots & (1-k)^{k-2}\lambda_1^{1-k} & \lambda_2^{1-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{-1} & \cdots & (-1)^{i-2}\lambda_1^{-1} & (-1)^{i}\lambda_1^{-1} & \cdots & (-1)^{k-2}\lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= 1!\,2!\cdots(k-2)!\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^{i+\nu-1}\lambda_2^{\nu-k}\lambda_1^{-\frac{k(k-1)}{2}-\nu+k}\frac{\sigma_{k-i-1}(\nu)}{(\nu-1)!(k-\nu-1)!}$$

$$(1 \leqslant i \leqslant k-1),$$

其中 $\sigma_p(\nu)$ 表示从 $-1, \cdots, \nu+1-k, \nu-1-k, \cdots, 1-k$ 中每次取 p 个的所有可能乘积之和;而

$$A_{kk} = \begin{vmatrix} \lambda_1^{1-k} & \cdots & (1-k)^{k-2}\lambda_1^{1-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{-1} & \cdots & (-1)^{k-2}\lambda_1^{-1} \end{vmatrix} = 1!\,2!\cdots(k-2)!\,\lambda_1^{-\frac{k(k-1)}{2}}.$$

(IV) $h = k-1, l_1 = 2, l_2 = \cdots = l_{k-1} = 1$. 此时方程 (15) 在 $|\lambda| < 1$ 中有一二重根,其余都是单根.

$$A_{k1} = (-1)^{k}\begin{vmatrix} (k-1)\lambda_1^{1-k} & \lambda_2^{1-k} & \cdots & \lambda_{k-1}^{1-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_2\cdots\lambda_{k-1})^{1-k}\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^{\nu+1}\nu\lambda_1^{-\nu}\sigma_{\nu-1}\prod_{2\leqslant\mu<\nu\leqslant k-1}(\lambda_\nu-\lambda_\mu).$$

这里 σ_p 表示由 $\lambda_2, \cdots, \lambda_{k-1}$ 中每次取 p 个的所有可能乘积之和;

$$A_{k2} = (-1)^{k}\begin{vmatrix} \lambda_1^{1-k} & \cdots & \lambda_{k-1}^{1-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k}(\lambda_1\cdots\lambda_{k-1})^{1-k}\prod_{1\leqslant\mu<\nu\leqslant k-1}(\lambda_\nu-\lambda_\mu),$$

而

$$A_{ki} = (-1)^{k+i}\begin{vmatrix} \lambda_1^{1-k} & (1-k)\lambda_1^{1-k} & \lambda_2^{1-k} & \cdots & \lambda_{i-2}^{1-k} & \lambda_i^{1-k} & \cdots & \lambda_{k-1}^{1-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{-1} & -\lambda_1^{-1} & \lambda_2^{-1} & \cdots & \lambda_{i-2}^{-1} & \lambda_i^{-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k+i}\lambda_1^{3-2k}\prod_{\substack{\nu=2\\ \nu\neq i-1}}^{k-1}(\lambda_\nu-\lambda_1)\lambda_\nu^{1-k}\prod_{\substack{1\leqslant\mu<\nu\leqslant k-1\\ \nu\neq i-1,\,\mu\neq i-1}}(\lambda_\nu-\lambda_\mu)\quad(3\leqslant i\leqslant k).$$

§5. 繁忙周期长度的分布

繁忙周期的长度有两种計量标准,一种以周期所經历的时間来衡度,另一种則以在此周期內受到服务的顧客总人数来計算. Conolly 在[3]中引进了一种方法,据此可以同时

得到以此两种不同单位来衡量的繁忙周期长度的分布. 在这里，我們将采用他的方法来討論 $GI/E_k/1$ 的情形.

我們以 $t=0$ 作为繁忙周期的开始时刻，亦卽在 $t=0$ 时，有一顧客来到，并且立卽被服务.

用 $P_m(t)\,dt$ 表示繁忙周期在 $(t-dt, t]$ 中終結，且在此周期中共有 m 个顧客受到服务的概率，于是

$$P_m = \int_0^\infty P_m(t)\,dt \tag{23}$$

就表示在一繁忙周期中共有 m 个顧客受到服务的概率；而

$$P(t)\,dt = \sum_{m=1}^\infty P_m(t)\,dt \tag{24}$$

則表示繁忙周期在 $(t-dt, t]$ 中終結的概率. 我們的目的就在于求 $P_m(t)$.

对于适合 $m+n \geqslant 2k$, $n \geqslant k$, $k \mid m+n$[1] 的自然数 m, n, 我們用 $f_{m,n}(t)\,dt$ 表示下述复合事件的概率:

(i) 在 $(0, t]$ 中始終是繁忙的,

(ii) 在 $(t-dt, t]$ 中有顧客到达,

(iii) 由于他的到达，系統(变形后的)所处的状态轉为 $n+1$,

(iv) 当此顧客到达时，第 $\left[\frac{m-1}{k}\right]+1$ 个顧客正在系統的第 $m-k\left[\frac{m-1}{k}\right]$ 站上被服务.

于是在 $P_m(t)$ 及 $f_{m,n}(t)$ 間就有次之关系:

$$\left.\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{k}{b}\, d_{k-1}(t), \\ P_m(t) &= \frac{k}{b}\int_0^t \sum_{r=1}^{(m-1)k} f_{r,mk-r}(s)\, d_{mk-r}(t-s)\,ds \quad (m \geqslant 2). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

上式的推求与 Conolly[3]中完全相似. 作 Laplace 变換，我們得到

$$P_1^*(z) = \frac{k}{b}\, d_{k-1}^*(z),\ P_m^*(z) = \frac{k}{b}\sum_{r=1}^{(m-1)k} f_{r,mk-r}^*(z)\, d_{mk-r}^*(z) \quad (m \geqslant 2). \tag{25'}$$

現在对于固定的 $r \geqslant k$, 命

$$F_r(y, z) = \sum_{\substack{m=1 \\ m+r\equiv 0\,(k)}}^\infty f_{m,r}^*(z)\, y^m, \tag{26}$$

此处和号的意思表示經过一切适合此同余式的自然数 m；又命

$$\Pi(y, z) = \sum_{m=1}^\infty P_m^*(z)\, y^{mk},$$

則有

$$\Pi(y, z) = \frac{k}{b}\left\{ d_{k-1}^*(z)\, y^k + \sum_{r=k}^\infty d_r^*(z)\, F_r(y, z)\, y^r \right\}. \tag{27}$$

---

1) $a|b$ 表示 a 能整除 b.

于是問題就轉为求 $F_r(y, z)$.

对于 $f_{m,n}(t)$, 我們有次之关系:

$$f_{m,n}(t) = \begin{cases} C_{m-1}(t) & (m+n=2k, m\leqslant k) \\ \int_0^t \sum_{r=1}^{m+n-2k} f_{r,m+n-k-r}(s)C_{m-r}(t-s)\,ds & (m+n>2k, k\leqslant n<2k), \\ \int_0^t \sum_{r=1}^{m} f_{r,m+n-k-r}(s)C_{m-r}(t-s)\,ds & (m+n>2k, n\geqslant 2k); \end{cases} \tag{28}$$

作 Laplace 变換, 就得到

$$f^*_{m,n}(z) = \begin{cases} C^*_{m-1}(z) & (m+n=2k, m\leqslant k), \\ \sum_{r=1}^{m+n-2k} f^*_{r,m+n-k-r}(z)C^*_{m-r}(z) & (m+n>2k, k\leqslant n<2k), \\ \sum_{r=1}^{m} f^*_{r,m+n-k-r}(z)C^*_{m-r}(z) & (m+n>2k, n\geqslant 2k). \end{cases} \tag{28'}$$

于是通过計算, 不难証明

$$\begin{cases} F^*_r(y,z) = C^*_{2k-r-1}(z)y^{2k-r} + \sum_{s=k}^{\infty} C^*_{k+s-r}(z)y^{k+s-r}F_s(y,z) & (k\leqslant r<2k), \\ F^*_r(y,z) = \sum_{s=0}^{\infty} C^*_s(z)y^s F^*_{s+r-k}(y,z) & (r>2k). \end{cases}$$

与 § 3 类似地应用和分方程的理論可以解得

$$F_r(y,z) = \sum_{i=1}^{h'}\sum_{j=1}^{l'_i} \alpha'_{ij}(r-k+1)^{j-1}\mu_i^{r-k+1} \quad (r\geqslant k), \tag{29}$$

其中

$$\mu_1, \cdots, \mu_{h'}$$

表方程

$$a^*\left(z+\frac{k}{b}(1-xy)\right) = x^k \quad (\Re(z)>0, |y|\leqslant 1)$$

的各个不同的根, 而 $l'_1, \cdots, l'_h$ 则分别表这些根的重数, 又 α'_{ij} 由綫性方程組

$$\sum_{i=1}^{h'}\sum_{j=1}^{l'_i} \alpha'_{ij}\gamma^{(s)}_{ij} = y^s C^*_{s-1}(z) \quad (s=1,\cdots,k) \tag{30}$$

所确定, 此处

$$\gamma^{(s)}_{ij} = \sum_{n=0}^{s-1} C^*_n(z)y^n(n-s+1)^{j-1}\mu_i^{n-s+1} \quad (1\leqslant s\leqslant k).$$

参　考　文　献

[1] Kendall, D. G., Stochastic processes occurring in the theory of gueues and their analysis by the method of the imdedded Markov Chain. *Ann. Math. Statist.*, **24** (1953), 338—354.

[2] Conolly, B. W., A difference equation technique applied to the simple queue with arbitrary arrival interval distribution. *J. Roy. Stat. Soc.* (B), **20** (1958), 165—175.

[3] Conolly, B. W. The Busy Period in relation to the queueing processes $GI/M/1$. *Biometrika*, **46** (1956), 246—251.
[4] Wishart, D. M. G., A queueing problem with χ^2 service time distribution. *Ann. Math. Statist.*, **27** (1956), 768—779.

SOME RESULTS ABOUT THE QUEUEING SYSTEM $GI/E_k/1$

WU FANG
(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Let $GI/E_k/1$ be a queueing process as defined in Kendall[1].

Applying the method introduced by Conolly[2], we obtained the distribution of the queue length at any finite time. The main result can be described as follows:

Theorem. Let $p_n(t)$ be the probability that the system is in state n at time t, and let

$$p_n^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} p_n(t)\, dt$$

be its Laplace transform, then

$$\begin{cases} p_n^*(z) = \displaystyle\sum_{m=(n-1)k+1}^{nk} \Big\{ \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} F_{j-1}(\lambda_i, m-k) - \\ \qquad - \displaystyle\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} \sum_{r=m}^{k-1} d_{r-m}^*(z)\,(r-k)^{j-1} \lambda_i^{r-k} \Big\} \quad (n>0), \\ p_0^*(z) = \dfrac{1}{z} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n^*(z) \end{cases}$$

where $\lambda_1, \cdots, \lambda_h$ are the distinct roots of the equation

$$\int_0^\infty e^{-t\left[z+\frac{k}{b}(1-\lambda)\right]}\, dA(t) = \lambda^k \quad (\Re(z) > 0)$$

in the unit circle $|\lambda| < 1$, and $l_1, \cdots, l_h$ are their multiplicities respectively; the coefficients α_{ij} are determined by the matrix equation

$$(\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1l_1}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2l_2}, \cdots, \alpha_{h1}, \cdots, \alpha_{hl_h}) = \frac{1}{1-a^*(z)} \frac{1}{|A|} (A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kk}),$$

where $|A|$ is the determinant of the $(k \times k)$ — matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1-k} & \cdots & (1-k)^{l_1-1}\lambda_1^{1-k} & \cdots & \lambda_h^{1-k} & \cdots & (1-k)^{l_h-1}\lambda_h^{1-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{-1} & \cdots & (-1)^{l_1-1}\lambda_1^{-1} & \cdots & \lambda_h^{-1} & \cdots & (-1)^{l_h-1}\lambda_h^{-1} \\ f_0(\lambda_1) & \cdots & f_{l_1-1}(\lambda_1) & \cdots & f_0(\lambda_h) & \cdots & f_{l_h-1}(\lambda_h) \end{pmatrix},$$

and A_{ki} is the cofactor of a_{ki} in A; and $f_0(\lambda) = \dfrac{1}{1-\lambda}$, $f_r(\lambda) = \lambda f'_{r-1}(\lambda)\,(r \geqslant 1)$,

$$F_0(\lambda, m) = \frac{b(1-\lambda^k)\lambda^m}{bz + k(1-\lambda)},$$

$$F_r(\lambda, m) = \lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} F_{r-1}(\lambda, m).$$

By calculation, we have

$$|A| = \prod_{i=1}^{h} \frac{1!\,2!\cdots(l_i-1)!}{(1-\lambda_i)^{l_i}} \lambda_i^{\frac{1}{2}l_i(l_i+1)-l_i k} \prod_{1\leqslant j<i\leqslant k} (\lambda_i - \lambda_j)^{l_i l_j}.$$

For A_{ki}, four particular cases have been considered here, namely

(I) $h = k,\ l_1 = \cdots = l_k = 1$;

(II) $h = 1,\ l = k$;

(III) $h = 2,\ l_1 = k-1,\ l_2 = 1$;

(IV) $h = k-1,\ l_1 = 2,\ l_2 = \cdots = l_{k-1} = 1$.

We concluded this paper by considering the Busy Period in relation to $GI/E_k/1$ as Conolly in[3].

第10卷 第2期 数学学报 Vol. 10, No. 2
1960年6月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1960

具有时滞微分方程系統稳定性*

張学銘
(山东大学数学系)

关于时滞微分方程系統的 Ляпунов 第二方法的应用，Б. С. Разумихин 在[1]中給出了許多基本結果，这些結果与一般的 Ляпунов 第二方法是很相似的. 在[2]中討論了按一次近似漸近稳定性具体的构造 Ляпунов 函数. Н. Н. Красовскии 在[3]中系統地总結了这方面的工作. 但对于各种类型的时滞微分方程系統，如何建造 Ляпунов 函数，还需要进行工作.

本文对于几个类型的时滞微分方程系統，提出了滿足漸近稳定性的 Ляпунов 函数的建立方法. 这些系統的类型如下:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h) \quad (i = 1, \cdots, n),$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h) + \varphi_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t), x_1(t-h)\cdots x_n(t-h)) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

以及

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\psi\left(\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt}\right) + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x(t-h(t))) = 0$$

等. 其中时滞 h 分为两种，一种是常数，一种是时間变量的連續函数，$0 \leqslant h(t) \leqslant h$.

1. 按一次近似的漸近穩定性

我們現在研究具有时滞微分方程系統

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h) \quad (h>0) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.1}$$

这里，A 为常数方陣，$B(t)$ 为 t 在区間 $I = [0, \infty)$ 上之連續有界函数，我們熟知，可以經过一个非异的綫性变換将(1.1)化为

$$\frac{dy}{dt} = Jy + B^*(t)y(t-h) \quad (h>0), \tag{1.2}$$

其中

$$B^*(t) = C^{-1}B(t)C, \ |C| \neq 0.$$

* 1960年2月17日收到.

$$J = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{bmatrix}, \quad M_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & & & \\ \varepsilon_{j_1} & \lambda_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_{j_m} & \lambda_j \end{bmatrix},$$

$j = 1, 2, \cdots\cdots, k$, m 表若当块的阶数.

經过这样变換,漸近稳定性的性质幷不改变.

这样,我們有下面的定理.

定理 1. 若(1.1)之一次近似系統平凡解是漸近稳定的,且滿足条件:

$$N < \frac{\alpha}{n} - \varepsilon \tag{1.3}$$

$$\left(N = \max_{1 \leqslant i,k \leqslant n} \{\sup_{t \in I} |b_{ik}(t)|\},\ \alpha = -\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\lambda_i\},\ \varepsilon = \max_{1 \leqslant s \leqslant m} \{|\varepsilon_s|\}\right)$$

(注: 設 λ_i 都是实根). 則 (1.1) 之平凡解是漸近稳定的.

証 我們只要証明(1.2)就可以. 作函数如下:

$$V(x(\theta)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + n\mu \int_{-h}^{0} \sum_{k=1}^{n} y_k^2(\theta) d\theta \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}_{[1.2]} &= \sum_{k=1}^{n} y_k(t) \frac{dy_k(t)}{dt} + n\mu \sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) - n\mu \sum_{k=1}^{n} y_k^2(t-h) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2(t) + \varepsilon(n-1) \sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) + n\mu \sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) \\ &\quad - n\mu \sum_{k=1}^{n} y_k^2(t-h) + N \sum_{k=1}^{n} \left(|y_i(t)| \sum_{k=1}^{n} |y_k(t-h)| \right) \leqslant \\ &\leqslant - \left\{ \left[\frac{\alpha}{n} - \varepsilon - \mu \right] n \left[\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) \right] - \right. \\ &\quad \left. - N \sum_{i=1}^{n} \left(|y_i(t)| \sum_{k=1}^{n} |y_k(t-h)| \right) + \mu n \left[\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t-h) \right] \right\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

很明显,只要(1.5)中之{ }正定,則 $\frac{dV}{dt}_{[1.2]}$ 負定. 我們考察(1.5),将它看作 n^2 个二次式之和,其形式为:

$$\left. \begin{aligned} &\left[\frac{\alpha}{n} - \varepsilon - \mu\right] y_1^2(t) - N|y_1(t)||y_1(t-h)| + \mu y_1^2(t-h) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left[\frac{\alpha}{n} - \varepsilon - \mu\right] y_1^2(t) - N|y_1(t)||y_n(t-h)| + \mu y_n^2(t-h) \end{aligned} \right\} \tag{1.6$_1$}$$

$$\left. \begin{aligned} &\left[\frac{\alpha}{n} - \varepsilon - \mu\right] y_2^2(t) - N|y_2(t)||y_1(t-h)| + \mu y_1^2(t-h) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left[\frac{\alpha}{n} - \varepsilon - \mu\right] y_2^2(t) - N|y_2(t)||y_n(t-h)| + \mu y_n^2(t-h) \end{aligned} \right\} \tag{1.6$_2$}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left[\frac{\alpha}{n}-\varepsilon-\mu\right]y_n^2(t)-N|y_n(t)||y_1(t-h)|+\mu y_1^2(t-h)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left[\frac{\alpha}{n}-\varepsilon-\mu\right]y_n^2(t)-N|y_n(t)||y_n(t-h)|+\mu y_n^2(t)\end{array}\right\}\qquad(1.6_n)$$

由于 $(1.6_1)\cdots(1.6_n)$ 中之系数完全一样，因此，我們只要其中任一个在什么条件下是正定函数，則 n^2 个二次式均为正定函数，从而 $\frac{dV}{dt}{[1.2]}$ 为負定。

任取

$$\left[\frac{\alpha}{n}-\varepsilon-\mu\right]y_1^2(t)-N|y_1(t)||y_2(t-h)|+\mu y_2^2(t-h).$$

当

$$4\left[\frac{\alpha}{n}-\varepsilon-\mu\right]\mu<N^2\qquad(1.7)$$

成立时，則此二次式正定．很明显，当

$$\mu=\frac{1}{2}\alpha-\varepsilon$$

时，(1.7) 之左达到最大値，故有

$$\frac{\alpha}{n}-\varepsilon<N,$$

而这是滿足定理的条件的．故 $\frac{dV}{dt}{[1.2]}$ 在此条件下負定，于是我們只要取 $\mu=\frac{1}{2}\alpha-\varepsilon$，就可作出 V 如(1.4)． 它为正定且具有无穷小上界的函数，沿着(1.2)的解的导数負定，故定理得証.

要指出，这样的 ε 是可以为任意小的正数．因此，$\frac{\alpha}{n}-\varepsilon>0$.

2. 变系数系統

我們将用上述方法，研究一次近似系統为具有变系数的情况．設微分方程系統为

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)x_k+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(t)x_k(t-h)\quad(i=1,2,\cdots,n),\qquad(2.1)$$

这里

$$B(t)\in C(I),\ A(t)\in C(I),\ I=[0,\infty).$$

我們有下面的定理

定理 2. 对于(2.1)若滿足下述条件：

(i) $A(t)$ 之对角上元素恆小于某一負数.

(ii)

$$\frac{M^*}{n}-N>W.\qquad(2.2)$$

这里，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\sup_{t\in I} a_{ii}(t)\} = M < 0,\ -M = M^*,$$

$$\max_{1\leqslant i\neq k\leqslant n}\{\sup_{t\in I}|a_{ik}(t)|\} = N,$$

$$\max_{1\leqslant i,k\leqslant n}\{\sup_{t\in I}|b_{ik}(t)|\} = W,$$

则(2.1)之平凡解是漸近稳定的.

証　作函数

$$V(x(\theta),t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + n\mu\int_{-h}^{0}\sum_{k=0}^{n} x_k^2(\theta)d\theta, \tag{2.3}$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}\Big[_{2.1]} &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)x_i^2(t) + \sum_{i\neq k}^{n} a_{ik}(t)x_k(t) + \\ &+ \mu n\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) - \mu n\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t-h) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left[x_i\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h)\right] \leqslant \\ &\leqslant -\left\{\left[\frac{M^*}{n} - N - \mu\right]n\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t)\right] - \right. \\ &- W\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|x_i(t)||x_k(t-h)| + \\ &\left. + \mu n\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t-h)\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.5}$$

同定理 1 一样，取

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{M^*}{n} - N\right)$$

时，可以得到当

$$W < \frac{M^*}{n} - N$$

时，$\frac{dV}{dt}\Big[_{2.1]}$ 为負定. 因而定理 2 得証.

3. 时滞为时間 t 的連續有界函数 $(0 \leqslant h(t) \leqslant h)$

設微分方程系統

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h(t)) \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{3.1}$$

我們有如下的定理.

定理 3.　对于 (3.1)，若滿足条件

(i) $A(t)$ 之对角綫上之元素恆小于一負数;

(ii) $4[M^*\psi(t)/n-\dot\psi(t)/2n-N-\mu]\mu[1+h'(t)]>W^2\psi^2(t)$; (3.2)

(这里的 M^*, N, W 都和定理 2 中一样)則(3.1)之平凡解是漸近稳定的.

証 作函数

$$V(x(\theta),t)=\frac{1}{2}\psi(t)\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right]+\mu n\int_{-h(t)}^{0}\sum_{k=1}^{n}x_k^2(\theta)d\theta, \tag{3.3}$$

这里,$\psi(t)$ 满足 $0<\lambda_1\leqslant\psi(t)\leqslant\lambda_2$.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}\Big|_{[3.1]}&=\psi\left[\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\dot x_k(t)\right]+\mu n\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^2(t)\right]-\\&-\mu n\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^2(t-h(t))\right][1+h'(t)]+\frac{1}{2}\dot\psi(t)\left[\sum_{k=1}^{n}x_k^2(t)\right]\leqslant\\&\leqslant-\left[\left(\frac{M^*}{n}\psi(t)-\frac{1}{2n}\dot\psi(t)-N-\mu\right)n\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2(t)\right)+\right.\\&+n\mu(1-h'(t))\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2(t-h(t))\right)-\\&\left.-W\psi(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|x_i(t)||x_k(t-h(t))|\right].\end{aligned} \tag{3.4}$$

和以前一样,$\dfrac{dV}{dt}\Big|_{[3.1]}$ 之負定問題,完全由

$$4\left[\frac{M^*}{n}\psi(t)-\frac{1}{2n}\dot\psi(t)-N-\mu\right]\mu[1-h'(t)]>W^2\psi^2(t) \tag{3.5}$$

决定,于是定理得証.

現在,我来分析一下(3.5). 很明显,我們看出 $[1+h'(t)]$ 与

$$\left[\frac{M^*}{n}\cdot\psi(t)-\frac{1}{2n}\dot\psi(t)-N-\mu\right]$$

要同号. 可分成下面两种情形討論之:

1) $[1-h'(t)]<0$,这时,必有 $h(t)>t$. 而此与假設中之 $h(t)$ 有界相矛盾,故此种不发生.

2) $[1-h'(t)]>0$, 則必有

$$\left[M^*\frac{\psi(t)}{n}-\frac{1}{2}\frac{\dot\psi(t)}{n}-N-\mu\right]>0.$$

亦即

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n}\dot\psi(t)-M^*\frac{1}{n}\psi(t)<-(N+\mu)$$

或

$$\dot\psi(t)-2M^*\psi(t)<-2n(N+\mu), \tag{3.6}$$

两端以 $\psi(t)$ 除之,得

$$\frac{\dot\psi(t)}{\psi(t)}<2M^*-\frac{2n(N-\mu)}{\psi(t)}<2M^*-\frac{2n(N+\mu)}{\lambda_2}. \tag{3.7}$$

取

$$\mu = \frac{\lambda_2}{2n}(2M^* + \ln \lambda_2) - N, \tag{3.8}$$

則

$$N + \mu = \frac{\lambda_2}{2n}(2M^* + \ln \lambda_2).$$

代入 (3.7)，积分之，得

$$\psi(t) < \psi(0)\lambda_2 \quad (\psi(0) = 1 +).$$

这样就說明了，对于給定一个函数 $\psi(t)$，$\lambda_1 \leqslant \psi(t) \leqslant \lambda_2$，由 N, M^*, λ_2, n 几个确定的数可以选定一个参数 μ，$\mu = \frac{\lambda_2}{2n}(2M^* + \ln \lambda_2) - N$，就能够建立满足要求 Ляпунов 函数.

4. 經擾下时滞系漸近穩定性

我們考虑經扰时滞微分方程系統

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h) + \varphi_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t), x_1(t-h), \cdots, x_n(t-h)) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.1}$$

和

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h(t)) + \varphi_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t), x_1(1-h(t)), \cdots, x_n(t-h(t))), \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{4.2}$$

其中 φ 总是满足条件：

$$|\varphi_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t), x_2(t-h(t)), \cdots, x_n(t-h(t)))| < \beta\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k(t)| + \sum_{k=1}^{n} |x_k(t-h(t))|\Big). \tag{4.3}$$

应用前几节的方法可得如下的定理：

定理 4. 对于 (4.1)，若 A 之特征根均具有負实部，且满足条件：

$$\frac{\alpha}{n} - (\varepsilon + \beta) > N + \beta, \tag{4.4}$$

則(4.1)之平凡解漸近稳定性由其一次近似来决定.

証 作函数

$$V(x(\theta), t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \mu\int_{-h}^{0} n\sum_{k=1}^{n} x_k^2(\theta)d\theta,$$

則得

$$\frac{dV}{dt}_{[4.1]} \leqslant -\Big\{\Big[\frac{\alpha}{n} - \varepsilon - \mu - \beta\Big]n\Big[\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t)\Big] - (N + \beta)\sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i(t)|\sum_{k=1}^{n}|x_k(t-h)|\Big) + \mu n\Big[\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t-h)\Big]\Big\}. \tag{4.5}$$

按条件(4.4),則定理得証.

同样可得到对于系統(4.2)的定理.

定理 5. 对于(4.2),若满足条件:

(i) $A(t)$ 之对角綫上之元素恆小于一負数,

(ii) $$4\left[\frac{M^*}{n}\psi(t)-\frac{1}{2n}\dot{\psi}(t)-N-\mu-\beta\right]\mu[1-h'(t)]>(W+\beta)^2\psi^2(t);\quad(4.6)$$

則(4.2)之平凡解是漸近稳定的.

証略.

5. 一类三阶方程

我們考虑如下的三阶非綫性方程:

$$\frac{d^3x}{dt^3}+a\frac{d^2x}{dt^2}+b\psi\left(\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}\right)+\varphi\left(\frac{dx}{dt}\right)+f(x(t-h(t)))=0,\qquad(5.1)$$

(1.5)具有如下的基本性質:

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \varphi(0)=\psi(0)=f(0)=0,\\&\text{(ii)}\quad |f'(x)|<L\ (\text{常数}),\\&\text{(iii)}\quad \frac{\varphi(y)}{y}>c_1>0,\ \frac{\psi(z)}{z}>c_2>0,\ \frac{f(x)}{x}>c_3>0\\&\qquad (x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0).\end{aligned}\qquad(5.2)$$

則我們有下面的定理.

定理 6. 对于(5.1),若满足条件:

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad a\frac{\varphi(y)}{y}-f'(x)>\frac{L^2}{4\mu^2}+\mu^2,\\&\text{(i)}\quad b\frac{\psi(z)}{z}>\frac{L^2}{4\mu^2}+\mu^2;\end{aligned}\qquad(5.3)$$

則(5.1)之平凡解是漸近稳定的.

証 将(5.1)变为下面的方程組:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y,\\\frac{dy}{dt}&=z-ay,\\\frac{dz}{dt}&=-\varphi(y)-b\psi(z)-f(x)-\int_{-h(t)}^{0}f'(x(t+\theta)y(t+\theta))d\theta.\end{aligned}\qquad(5.4)$$

現在我們对(5.4)来作 Ляпунов 函数. 作函数

$$V(x(\theta),y(\theta),z(\theta))=a\int_0^x f(\zeta)d\zeta+f(x)y+\int_0^y\varphi(y)dy+\frac{1}{2}z^2+$$
$$+\mu^2\int_{-h}^{0}\left[\int_{\theta_1}^{0}(y^2(\theta)+z^2(\theta))d\theta_1\right]d\vartheta.\qquad(5.5)$$

这时,我們可以指出(5.5)是正定的,事实上,我們只要能够証明

$$a\int_0^x f(\xi)d\xi+f(x)y+\int_0^y \varphi(y)dy \tag{5.6}$$

是正定的就够了.

今往証(5.6)为正定,这个証明是巴尔巴辛[4]提出的.

$$a\int_0^x f(\xi)d\xi+f(x)y+\int_0^y \varphi(y)dy=$$

$$=\frac{\left[2\int_0^y \varphi(y)dy+f(x)y\right]^2}{4\int_0^y \varphi(y)dy}+\frac{\left[4a\int_0^x f(\xi)d\xi\right]\int_0^y \varphi(y)dy-y^2f^2(x)}{4\int_0^y \varphi(y)dy}.$$

当 $y\neq 0$, $\int_0^y \varphi(y)dy>0$, 当 $x\neq 0$, $y\neq 0$ 时,

$$\left[\left(4a\int_0^x f(\xi)d\xi\right)\int_0^y \varphi(y)dy-y^2f^2(x)\right]=4\int_0^x f(\xi)\left[\int_0^y\left(a\frac{\varphi(y)}{y}-f'(x)\right)ydy\right]d\xi.$$

因此,按条件(5.2)(i),则(5.6)正定. 同时,很明显,(5.5)是具有无穷小上界的.

現在我們沿着(5.1)求 V 的全导数,得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{[5.1]}=-a\varphi(y)y-bz\psi(z)+f'(x)y^2+z(t)\int_{-h(t)}^0 f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta+$$
$$+\mu^2\int_{-h}^0[z^2(t)-y^2(t+\theta)]d\theta+\mu^2\int_{-h}^0[y^2(t)-z^2(t+\theta)]d\theta.$$

按(5.1)的基本性质,可得下面的估計式:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{[5.1]}<-\left(a\frac{\varphi(y)}{y}-f'(x)\right)y^2-b\frac{\psi(z)}{z}z^2+\int_{-h(t)}^0 L|z(t)||y(t+\theta)|d\theta+$$
$$+\int_{-h(t)}^0 L|y(t)||z(t+\theta)|d\theta+\mu^2\int_{-h}^0[z^2(t)-y^2(t+\theta)]d\theta+$$
$$+\mu^2\int_{-h}^0[y^2(t)-z^2(t+\theta)]d\theta=-\left\{\int_{-h}^0\left[a\frac{\varphi(y)}{y}-f'(x)-\mu^2\right]y^2-\right.$$
$$-[|y(t)||z(t+\theta)|+\mu^2z^2(t+\theta)]d\theta+\int_{-h}^0\left[\left(b\frac{\psi(z)}{z}-\mu^2\right)z^2-\right.$$
$$-[|z(t)||y(t+\theta)|+\mu^2y^2(t+\theta)]d\theta. \tag{5.7}$$

根据定理条件,(5.7)的右端的被积函均为正定,故 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{[5.1]}$ 負定. 因而 V 确为满足(5.1)平凡解漸近稳定之 Ляпунов 函数,于是定理得証.

这里,要指出,(5.1)是較巴尔巴辛所研究过的三阶类更广泛得多.

参　考　文　献

[1] Разумихин, Б. С., *ПММ*, **20** (1956), В. 3.
[2] Разумихин, Б. С., *ПММ*, **22** (1958), В. 2.
[3] Красовский, Н. Н., *Некоторые задачи теории устойчивости движения* (1959).
[4] Барбашин, Е. А., *ПММ*, **16** (1952), В. 5.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Чжан Сюй-мин

(Шаньдуньский Университет)

Резюме

В настоящей работе рассматривается асимптотическая устойнивость тривиального решения систем уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)x_k(t-h) + \varphi_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t), x_1(t-h), \cdots, x_n(t-h)) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.3}$$

$$\left[|\varphi_i| < \beta\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |x_k(t-h)|\right)\right]$$

и уравнения

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\psi\left(\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt}\right) + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x(t-h(t))) = 0, \tag{1.4}$$

где $\varphi(0) = \psi(0) = f(0) = 0$, $\dfrac{\varphi(y)}{y} > c_1 > 0$, $\dfrac{\psi(z)}{z} > c_2 > 0$ и $\dfrac{f(x)}{x} > c_3 > 0$.

Мы получим следующие теоремы:

Теорема 1. Если корни λ «характеристического» уравнения

$$|(a_{ik}) - \lambda I| = 0$$

Удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re}\lambda < -\gamma \quad (\gamma > 0)$$

и

$$B < \frac{a}{n} - \varepsilon, \tag{1.5}$$

где

$$B = \max_{1\leqslant i,k\leqslant 1}\{\sup_{0\leqslant t<\infty}|b_{ik}(t)|\}, \quad \varepsilon = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|\varepsilon_j|\},$$

$$a = -\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\operatorname{Re}\lambda_i\};$$

то решение $x_i(t) = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$V(x(\theta)) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + n\mu\int_{-h}^{0}\sum_{k=1}^{n} x_k^2(\theta)d\theta.$$

Вычисляя производную от V вдоль траектории системы (1.1), имеем:

$$\frac{dV}{dt}_{(1.1)} \leqslant -\left[\left(\frac{a}{n} - \varepsilon - \mu\right)n\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) - \right.$$

$$\left. - B\sum_{j=1}^{n}\left(|x_j(t)|\sum_{k=1}^{n}|x_k(t-h)|\right) + \mu n\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t-h)\right].$$

По (1.5), $\frac{dV}{dt}_{(1.1)}$ Была определенно-отрицательной, и следовательно, Решение $x_i(t) = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если для системы (1.2)

$$-\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\sup_{0\leqslant t<\infty} a_{ii}(t)\} = M^*$$

и

$$\frac{M^*}{n} - H > W, \tag{1.6}$$

где

$$H = \max_{1\leqslant i\neq k\leqslant n}\{\sup_{0\leqslant t<\infty}|a_{ik}(t)|\} \text{ и } W = \max_{1\leqslant i,k\leqslant n}\{\sup_{0\leqslant t<\infty}|b_{ik}(t)|\},$$

то решение $x_i(t) = 0$ системы (1.2) асимптотически устойчиво. Если $h = h(t)$, $0 \leqslant h(t) \leqslant \bar{h}$, $\lambda_1 \leqslant \psi(t) \leqslant \lambda_2$ и

$$\left[\frac{M^*}{n}\psi(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{n}\dot{\psi}(t) - N - \mu\right]\mu(1 - h'(t)) > W^2\psi(t),$$

то решение $x_i(t) = 0$ системы (1.2) асимптотически устойчиво.

Теорема 3. Если для системы (1.3) M^*, H и β удовлетворяют неравенству

$$\frac{M^*}{n} - (H + \beta) > W + \beta,$$

то решение $x_i(t) = 0$ системы (1.3) асимптотически устойчиво.

Теорема 4. Если для уравнения (1.4) φ, ψ и f удовлетворяют неравенствам

(i) $$a\frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > \frac{L^2}{4\mu^2} + \mu^2$$

и

(ii) $$b\frac{\psi(z)}{z} > \frac{L}{4\mu^2} + \mu^2,$$

то решение $x_i(t) = 0$ уравнения (1.4) асимптотически устойчиво.

第10卷 第2期 数 学 学 报 Vol. 10, No. 2
1960 年 6 月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1960

关于圆内具有两个例外值 B 的全純函数[1)2)3)]

謝 暉 春
(福 建 师 范 学 院)

引 言

1. 对于在单位圆内的亚純函数 $f(z)$ 熊庆来教授借助于密指标 $N(r,\alpha)$ 导入例外值 B 的定义[1,a]，而于 f 不取 0 且容許 1 为例外值 B 的全純函数，他証明了一个界囿定理[1,b] 有类于著名的灼特基(Schottky)定理[2].

本文于值 1 的假設易 f 为 $f^{(k)}$ 时，我們証明一个定理类似于密朗达-伐利隆(Miranda-Valiron) 定理[3]. 关于此定理的証法原則上我們系循熊氏給与密伐二氏定理一个新証明[1,c] 中所用者；他所得的囿界在精密度上实已达到所期待的結果，但在灼氏定理中項 $\log\frac{1}{r}$ 及常量 $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right|$ 可不存在，而熊氏定理中含有此二量尙为美中不足有如他所指出者. 我們利用亚純函数$f(z)$容許 0 及∞为例外值 B 的条件得置奈望利納(Nevanlinna)氏引理及其推广于不含 $\overset{+}{\log}\frac{1}{r}$ 項的形状下；再于消去法上加以改善得以消去常量 $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right|$，从而获致满意的結果. 其次，我們应用上述引理更将所論及之諸氏定理拓广于 f 或并其紀数(导)数具有两个例外值 B 的情况[5]. 此外，奈氏于其学理中嘗引用精縮指量 $\bar{N}(r,\alpha)$ 以代 $N(r,\alpha)$ 及 $\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\beta}\right)$ 以代 $N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\beta}\right)$ 而得較精进的結果. 我們于此証明上述諸定理于其精确化的結果亦成立.

自前述之囿界定理我們可导出一新的正規族定則及有类于朗道(Landau)定理的結果.

I. 預备的叙述与引理

2. 为了以后需要我們回忆一个由布乐(Bureau)所証明并为熊氏所改进的波誦耳(Borel)定理:

引理 A. 設 $v(r)$ 为于 $0 \leqslant r < 1$ 內不減的正值函数及 $a(r)$ 为同一区間內不增的有穷正值函数(可为常量). 若 b 与 c 为二正的数字常量其 $b \geqslant 1$, 不等式

$$v(r) < a(r) + b\log\frac{1}{R-r} + c\overset{+}{\log} v(R) \tag{1.1}$$

---

1) 本文得到熊庆来教授热忱的指导和鼓励，謹于此致以深切的謝意.
2) 本文部分結果曾摘要載于科学紀录.
3) 1960 年 3 月 15 日收到.

于 $0 \leqslant r_0 < r < R < 1$ 成立，則于 $r_0 \leqslant r < 1$ 恆有不等式

$$v(r) < Aa(r) + B \log \frac{2}{1-r}, \tag{1.2}$$

A 与 B 为仅依賴于 b 与 c 的数字常量.

3. 在我們所論述的特定情況下，我們証明一个由熊氏所推广并精密化后之奈氏引理的簡单形式，其命題如下：

引理 B. 設 $f(z)$ 为于单位圓內亚純的函数. 若其容許 0 及 ∞ 为例外值 B，使于 $0 < r < 1$ 满足

$$N(r, 0) < \lambda_1 \log \frac{1}{1-r},\quad N(r, \infty) < \lambda_2 \log \frac{1}{1-r} \qquad (\lambda_1, \lambda_2 > 0),$$

(α) 則設 $f(0) \neq 0, \infty$ 于 $0 \leqslant r < \rho < 1$ 有不等式

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < (9 + 2\lambda) \log 2 + 2 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(0)}\right| + (3 + 2\lambda) \log \frac{1}{\rho - r} + 2 \overset{+}{\log} T(\rho, f) \tag{1.3}$$

及

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < a_k + a'_k \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(0)}\right| + b_k \log \frac{1}{\rho - r} + 2 \log T(\rho, f), \tag{1.4}$$

其中 λ 为量 λ_1 及 λ_2 之較大者；$a_k, \cdots, b_k$ 为仅与数 k 及 λ 有关的数字常量.

証. 从普瓦松-詹生(Poisson-Jensen)公式[4] 导得

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \frac{2Re^{i\theta} d\theta}{(Re^{i\theta} - z)^2} +$$

$$+ \sum_{|a_\mu| < R} \frac{R^2 - |a_\mu|^2}{(z - a_\mu)(R^2 - \bar{a}_\mu z)} - \sum_{|b_\nu| < R} \frac{R^2 - |b_\nu|^2}{(z - b_\nu)(R^2 - \bar{b}_\nu z)}, \tag{1.5}$$

其中 $|z| = r < R < 1$.

由此关系式用习知的方法可求得

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 6 \log 2 + 2 \log \frac{1}{R - r} + \log \frac{1}{\rho - R} + 2 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(0)}\right| + N(R) - N(r) + \overset{+}{\log} T(\rho, f), \tag{1.6}$$

此处 $0 \leqslant r < R < \rho < 1$. 根据假設$(\alpha)$，故有

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 6 \log 2 + 2 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(0)}\right| + 2 \log \frac{1}{R - r} + \log \frac{1}{\rho - r} + (\lambda_1 + \lambda_2) \log \frac{1}{1 - R} + 2 \overset{+}{\log} T(\rho, f). \tag{1.7}$$

取 $R - r = \dfrac{\rho - r}{2}$，此不等式立即化为(1.3).

現在我們来証明不等式(1.4). 假定不等式

$$m\left(r, \frac{f^{(p)}}{f}\right) < a_p + a'_p \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(0)}\right| + b_p \log \frac{1}{\rho - r} + 2 \overset{+}{\log} T(\rho, f) \tag{1.8}$$

于 $p = 1, 2, \cdots, k - 1$ 为眞理；我們証明(1.8)于 $p = k$ 亦眞.

从式(1.5)出发求 $k - 1$ 次微分而得等式：

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right]=\frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\frac{2Re^{i\theta}d\theta}{(Re^{i\theta}-z)^{k+1}}+$$
$$+(k-1)!\sum_{|a_\mu|<R}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{(z-a_\mu)^k}+\frac{\bar{a}_\mu{}^{k-1}}{(R^2-\bar{a}_\mu z)^k}\right]$$
$$-(k-1)!\sum_{|b_\nu|<R}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{(z-b_\nu)^k}+\frac{\bar{b}_\nu{}^{k-1}}{(R^2-\bar{b}_\nu z)^k}\right]. \tag{1.9}$$

于此置 $V(r,f)=m(r,f)+m\left(r,\frac{1}{f}\right)$，而得

$$\left|\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right]\right|<k!\,\frac{2}{(R-r)^{k+1}}V(r,f)+\frac{2^{k+1}}{(R-r)^{2k}}\left[\sum_{|a_\mu|<R}\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu z}{R(z-a_\mu)}\right|^k\right.$$
$$\left.+\sum_{|b_\nu|<R}\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu z}{R(z-b_\nu)}\right|^k\right], \tag{1.10}$$

并按照不等式(1.8)获得

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)<a_k+a_k'\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right|+b_k\log\frac{1}{R-r}+$$
$$+N(R)-N(r)+2\overset{+}{\log}T(\rho,f). \tag{1.11}$$

根据引理 B 的假設并置 $R-r=\frac{\rho-r}{2}$，此不等式于是化为式(1.4).

注意. 若 $f(z)$ 为于整个平面上的亚純函数，且容許 0 及 ∞ 为例外值 B，我們易条件 (α) 为于 $0\leqslant r<\infty$ 满足

$N(r,0)<\lambda_1\overset{+}{\log}T(r,f),\quad N(r,\infty)<\lambda_2\overset{+}{\log}T(r,f)\quad(\lambda_1,\lambda_2>0)$,

则于 $0\leqslant r<\infty$ 可得类似引理 B 中的不等式.

II. 界 囿 定 理

4. 我們首先考察函数不取零的情形.

定理I. 設 $f(z)$ 为于单位圓内全純的函数；若其不取 0 且其紀数 $f^{(k)}$ 容許 1 为例外值 B，使于 $0<r<1$ 满足

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)<\lambda'\log\frac{1}{1-r}\ (\lambda'>0), \tag{α'}$$

則設 $f^{(k)}(0)\neq 1$，于 $0<r<1$，有不等式

$$\log M(r,f)<\frac{1}{1-r}\left[H_k\overset{+}{\log}|f(0)|+K_k\log\frac{2}{1-r}\right], \tag{2.1}$$

H_k 及 K_k 为仅与 k 和 λ' 有关的数字常量.

証 从布乐 (Bureau) 恆等式

$$\frac{1}{f}\equiv\frac{f^{(k)}}{f}-\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\cdot\frac{f^{(k+1)}}{f} \tag{2.2}$$

出发，导得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)<m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)+\log 2. \tag{2.3}$$

設 $f^{(k+1)}(0) \neq 0$，应用詹生（Jensen）公式于式(2.3)右端之第三項．根据关系式

$$m(r,f) = m\left(r,\frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|$$

和 $f^{(k)}$ 关于值 1 的假設,而得

$$m(r,f) < m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right) + m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+ \lambda' \log\frac{1}{1-r} + \log|f(0)| + \log\left|\frac{f^{(k)}(0)-1}{f^{(k+1)}(0)}\right| + \log 2. \tag{2.4}$$

为要界囿不等式(2.4)的右端,我們应用引理 B 中之不等式(1.4)于其首二項而援用不等式(1.3)于其第三項．例如

$$m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right) < (10+\lambda')\log 2 + 2\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(k)}(0)-1}\right|$$

$$+ (3+\lambda')\log\frac{1}{\rho - r} + 2\overset{+}{\log}\, m(\rho,f), \tag{2.5}$$

此处 $0 < r < \rho < 1$.

注意

$$\log|f^{(k)}(0)-1| + 2\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(k)}(0)-1}\right| < \overset{+}{\log}|f^{(k)}(0)| + 3,$$

并消去 $f^{(k)}(0)$．为要施行消去法,我們书

$$\overset{+}{\log}|f^{(k)}(0)| = \overset{+}{\log}\left[\left|\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right|\cdot|f(0)|\right] < \overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right|,$$

并自

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right| = m\left(0,\frac{f^{(k)}}{f}\right) < m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right),$$

复应用引理 B 可得其长化函数.

因此,不等式(2.4)化为

$$m(r,f) < a'_k + b'_k\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \overset{+}{\log}|f(0)| + \log|f(0)| +$$

$$+ c'_k\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(k+1)}(0)}\right| + d'_k\log\frac{1}{\rho - r} + 6\overset{+}{\log}\, m(\rho,f),$$

經过一番簡化手續,上述不等式可取如次的形式:

$$m(r,f) < A_k\overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(k+1)}(0)}\right| + B_k\log\frac{1}{\rho - r} + C_k\overset{+}{\log}\, m(\rho,f), \tag{2.6}$$

A_k, B_k, C_k[1] 为仅与 k 及 λ' 有关的数字常数.

应用引理 B 于此不等式,則其可化为

$$m(r,f) < H_k\left(\overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(k+1)}(0)}\right|\right) + K_k\log\frac{2}{1-r}. \tag{2.7}$$

其次,由熟知的平均不等式

---

1) 此后我們以 A', B'_k, $\cdots$; α_k, β_k, $\cdots$; H_k, K_k, $\cdots$ 表同性質的量.

$$\log M\ (r,f) < \frac{R+r}{R-r} m(R,f) \quad (r < R < 1), \tag{2.8}$$

并取 $R = r + \dfrac{1-r}{2}$ 即得

$$\log M(r,f) < \frac{1}{1-r}\left[H'_k\left(\overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(k+1)}(0)}\right|\right) + K'_k \log\frac{2}{1-r}\right]. \tag{2.9}$$

至此問題只在于消去值 $f^{(k+1)}(0)$. 若 $|f^{(k+1)}(0)| \geqslant 1$, 則不等式 (2.9) 卽刻化为式 (2.1).

今我們假定 $|f^{(k+1)}(0)| < 1$. 若 $|f^{(k+1)}(z)| > 1$ 于 $0 < |z| < \varepsilon$ 恆成立, 則可以証明 $|f^{(k+1)}(0)| > \dfrac{1}{2}$ 且由(2.9)而得式(2.1). 否則我們假定 $|f(z)|$ 于圓周 $|z| = r(0 < r < 1)$上某点 $\zeta = re^{i\alpha}$ 达到最大值. 兹分两种情况論述之:

1° 若于射綫 $O\zeta$ 上恆有 $|f^{(k+1)}(z)| < 1$, 則自原点沿此射綫对 $f^{(k+1)}, f^{(k)}, \cdots, f'$ 求积分而得

$$|f^{(k)}(z)| < |f^{(k)}(0)| + \left|\int_0^z f^{(k+1)}(t)dt\right| < |f^{(k)}(0)| + r, \tag{2.10}$$

$$|f^{(k-1)}(z)| < |f^{(k-1)}(0)| + |f^{(k)}(0)|r + \frac{r^2}{2!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|f(z)| < |f(0)| + \sum_{\nu=1}^{k} |f^{(\nu)}(0)| \frac{r^\nu}{\nu!} + \frac{r^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{2.11}$$

特別有

$$|f(\zeta)| < |f(0)| + \sum_{\nu=1}^{k} |f^{(\nu)}(0)| \frac{r^\nu}{\nu!} + \frac{r^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{2.12}$$

为了消去值 $f'(0), \cdots, f^{(k)}(0)$, 我們作如下的討論: 設值 $|f^{(p)}(0)|$ 为 $|f'(0)|, \cdots, |f^{(k)}(0)|$中之最大者;若$|f^{(p)}(0)| \leqslant 1$,則立卽得 $\overset{+}{\log}|f(z)|$ 之一界限 $\overset{+}{\log}|f(0)| + A_k$, A_k 为一仅依賴于 k 的常量. 若 $|f^{(p)}(0)| > 1$, 則有

$$|f(\zeta)| < |f^{(p)}(0)|e^r, \tag{γ}$$

从而

$$\log|f(\zeta)| < \log|f^{(p)}(0)| + r. \tag{2.13}$$

我們书 $f^{(p)}(0) = f(0)\cdot\dfrac{f^{(p)}(0)}{f(0)}$, 并且根据引理$B$立卽达到消去$|f^{(p)}(0)|$ 的目的. 因此 (2.13)式化为

$$\log|f(\zeta)| < \log|f(0)| + \alpha_k + \alpha'_k \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \beta_k \log\frac{1}{\rho - r} + 2\overset{+}{\log}\ m(\rho, f), \tag{2.14}$$

經过簡化可得形如下之不等式:

$$m(r,f) < A'_k \overset{+}{\log}|f(0)| + B'\log\frac{1}{\rho - r} + C'_k \overset{+}{\log}\ m(\rho, f). \tag{2.15}$$

援用引理A于(2.15),我們获得

$$m(r,f) < H'_k \overset{+}{\log} |f(0)| + K'_k \log \frac{2}{1-r}, \tag{2.16}$$

根据公式(2.8)可达式(2.1).

2° 在 $O\zeta$ 上有点使 $|f^{(k+1)}(z)| \geqslant 1$. 命 $z_0 = r_0 e^{i\alpha}$ 为这类点之最靠近原点者；取

$$z = z_0 + (1 - r_0)Z \tag{1.17}$$

及

$$F(Z) = \frac{1}{(1-r_0)^k} f[z_0 + (1-r_0)Z]. \tag{2.18}$$

当 $r = |z|$ 自 r 移动到 1 时，点 Z 描繪一单位圓. 不难看出在此圓内 $F(Z)$ 不取 0 并 $F^{(k)}(Z)$ 容許 1 为例外值 B.

由此我們如熊氏在密伐二氏定理的新証内所論者演之，得形如下之不等式：

$$\log |f(\zeta)| < \frac{1}{1-r}\left[H''_k \overset{+}{\log} |f(z_0)| + K''_k \log \frac{2}{1-r}\right]. \tag{2.19}$$

現在許我們消去値 $f(z_0)$. 沿射綫 $O\zeta$ 自 O 至 z_0 对 $f^{(k+1)}, f^{(k)}, \cdots, f'$ 求积分，得

$$|f(z_0)| < |f(0)| + \sum_{\nu=1}^{k} |f^{(\nu)}(0)| \frac{r^\nu}{\nu!} + \frac{r^{k+1}}{(k+1)!},$$

故只須消去値 $f'(0), \cdots, f^{(k)}(0)$. 利用前面的方法即可达到所欲求者，如是有

$$|f(z_0)| < a''_k \overset{+}{\log}. |f(0)| + b''_k \log \frac{2}{\rho - r} + c''_k \overset{+}{\log}\, m(\rho, f). \tag{2.20}$$

以此囿界代于(2.19)即得

$$\log M(r,f) < \frac{1}{\rho - r}\left[\alpha_k \overset{+}{\log} |f(0)| + \beta_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log}\, \overset{+}{\log}\, M(\rho, f)\right]. \tag{2.21}$$

于是应用引理 A 即得形为(2.1)于 $r > 0$ 有效的不等式.

定理 I 于是証毕.

5. 我們尚可获致更精进的結果. 为簡便計，于以 $\overline{N}(r,\alpha)$ 代 $N(r,\alpha)$ 而界定的例外值 B，我們名之为精縮例外值 B. 由此定义我們能够精确化熊氏一个定理；我們援用其方法并在应用詹生公式后計及

$$N(r,1) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \leqslant \overline{N}(r,1),$$

得命題

定理 II. 設函数 $f(z)$ 于单位圓内全純. 若它不取值 0 且容許 1 为精縮例外值 B，使于 $0 < r < 1$ 有

$$\overline{N}(r,1) < \lambda \log \frac{1}{1-r} \quad (\lambda > 0), \tag{α}$$

則設 $f(0) \neq 1$ 于 $0 \leqslant r < 1$ 有

$$\log M(r,f) < \frac{1}{1-r}\left[H \overset{+}{\log} |f(0)| + K \log \frac{2}{1-r}\right], \tag{2.22}$$

H 及 K 为仅与 λ 有关的数字常量.

类似地，若以 $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$ 代 $N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$，我們尙可获致定理 I 之較精进的結果.

6. 我們可拓广上述諸定理于函数 f 容許 0 为例外值 B 的情况:

定理 III. 設函数 $f(z)$ 为于单位圓內全純. 若它容許 0 及 1 为例外值 B，使于 $0<r<1$ 满足

$$N(r,0)<\lambda_1\log\frac{1}{1-r},\ N(r,1)<\lambda_2\log\frac{1}{1-r}\quad(\lambda_1,\lambda_2>0),\ (\beta)$$

則設 $f(0)\neq 0, 1$ 于 $0<r<1$ 有不等式

$$\log M(r,f)<\frac{1}{1-r}\left[H\log^+|f(0)|+K\log\frac{2}{1-r}\right],\tag{2.23}$$

H 及 K 为仅与 λ_1, λ_2 之較大者有关的数字常量.

蓋由奈望利納恆等式

$$\frac{1}{f}\equiv 1-\frac{f-1}{f'}\cdot\frac{f'}{f}\tag{2.24}$$

导得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)<m\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\log 2;$$

設 $f'(0)\neq 0$ 且按償生公式,則可化之为

$$m(r,f)<m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N(r,0)+N(r,1)$$

$$+\log|f(0)|+\log\left|\frac{f(0)-1}{f'(0)}\right|+\log 2.\tag{2.25}$$

其次,根据函数 f 关于值 0 及 1 的假設(β)并且应用引理于(2.25)右端之首二項，則得 $m(r,f)$ 之一界囿. 繼应用熊氏方法消去値 $f'(0)$ 便有形如

$$m(r,f)<\frac{1}{1-r}\left[H'\log^+|f(0)|+\overline{H}'\log\frac{1}{1-r_0}+K'\log\frac{2}{1-r}\right].\tag{2.26}$$

之不等式. 由此立即可变为(2.23).

7. 定理 IV. 設函数 $f(z)$ 于单位圓內全純. 若其容許 0 并其紀数 $f^{(k)}$ 容許 1 为例外值 B，使于 $0<r<1$ 满足

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)<\lambda_1'\log\frac{1}{1-r},\ N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)<\lambda_2'\log\frac{1}{1-r}\quad(\lambda_1',\lambda_2'>0),(\beta')$$

則設 $f(0)\neq 0$ 及 $f^{(k)}(0)\neq 1$ 于 $0<r<1$ 有

$$\log M(r,f)<\frac{1}{1-r}\left[H_k\log^+|f(0)|+K_k\log\frac{2}{1-r}\right],\tag{2.27}$$

H_k 和 K_k 为仅与 λ_1', λ_2' 之較大者及与 k 有关的数字常量.

此定理之証明与定理 I 相似,只須注意到关于 $N\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 与 $N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$ 的假定.

此外，若我們考虑到精縮例外值 B 的概念，尙可获致前面两个定理的較精进結果.

III. 圓内全純函数族正規性定則

8. 由定理 II 我們得一正規族正則：

定理 V. 在单位圓内全純的函数族，若每函数不取值 0 且容許 1 为精縮例外值 B，則是正規的.

并自定理 I 可証明一新的正規定則如下：

定理 VI. 若在单位圓内全純的函数族，其每函数不取值 0 且其任意一級 k 的紀数容許 1 为例外值 B，則是正規的.

盖試任意給与所設的函数族($\mathfrak{F}$)中之一无穷序列 $\{f_n\}$；若諸数值 $f_n(0)$ 有一有穷的聚值，設为 γ_0，則我們可自 $\{f_n\}$ 中选取一子序列 $\{f_{n_i}(0)\}$ 收歛于γ_0. 于是援用定理 I 于諸函数 $f_{n_i}(z)$，則有

$$\log M(r, f_{n_i}) < \frac{1}{1-r}\left[H_k \overset{+}{\log} |f_{n_i}(0)| + K_k \log \frac{2}{1-r}\right]. \tag{3.1}$$

当 $n_i \to \infty$ 时，量 $\overset{+}{\log} |f_{n_i}(0)|$ 是界囿的. 今以 (C_r) 表圓 $|z| \leqslant r$，可以看出諸函数 $f_{n_i}(z)$ 于(C_r)上是均等有界的. 由是可断定序列 $\{f_{n_i}\}$ 于其上为正規的. 因为自 $\{f_{n_i}\}$ 中必能选出一子序列一致收歛于圓(C_r)上.

若諸值 $f_n(0)$ 只能有无穷大为聚值，則由[1,c] 可知必能自$\{f_n\}$中选取一子序列 $\{f_n'\}$ 使于 (C_r) 上一致收歛于无穷.

因此，($\mathfrak{F}$) 在圓 (C_r) 内是正規的；由此可推出它在单位圓内是正規的.

若在 VI 中易 $N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$以$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$，則可得类似于 V 的定則.

9. 关于定則 VI，我們尙可置之于次述較一般的形状下.

定理 VI′. 設在一圓(C)：$|z| < R$ 内为全純的函数族，若其每函数 f 不取值 α 且 f 的任意級 k 的导数容許异于零的一值 β 为例外值B，則在此圓内是正規的.

盖通过变数与函数的变换

$$z = RZ \text{ 及 } F(Z) = \frac{f(z)-\alpha}{\beta R^k}, \tag{3.2}$$

即可将命題 VI 导得命題 VI′.

IV. 朗道 (Landau) 定理的拓广

10. 最后我們还可給出著名的朗道定理的拓广. 例如有：

定理 VII. 設函数 $F(Z)$ 于原点邻域内全純，且展成級数

$$F(Z) = C_0 + C_1 Z + \cdots \quad (C_0, C_1 \neq 0). \tag{4.1}$$

設在此域内 F 容許值 0 并其任意一級 k 的紀数$F^{(k)}$容許 1 为例外值 B，使于 $0 < R < R_1$ 满足

$$N\left(R, \frac{1}{F}\right) < \lambda_1' \log \frac{R_1}{R_1 - R}, \quad N\left(R, \frac{1}{F^{(k)}-1}\right) < \lambda_2' \log \frac{R_1}{R_1 - R} \quad (\lambda_1, \lambda_2 > 0), \quad (\beta'')$$

若是則在以原点为中心 R_1 为半径的圓 (C) 内，設 $C_k \neq 1$ 或者有不等式

$$|C_1| R_1 < \mu_k e^{\sigma_k \Omega_0}, \quad \Omega_0 = \overset{+}{\log} |C_0| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{C_0}\right|, \tag{4.2}$$

其中 μ_k 及 σ_k 为仅与 λ_1', λ_2' 之較大者及与 k 有关的数字常量；或者，在下述两情况必居其一：

1° F 于 (C) 內失其全純性；

2° F 于 (C) 內或 $F^{(k)}$ 于 (C) 内不滿足条件 (β'').

誠然，援用熊氏关于蒙密二氏的圈属中所用方法可証得

$$\log M(r, f) < \frac{R_1}{R_1 - r}\left[H_k \overset{+}{\log} |f(0)| + K_k \log \frac{2R_1}{R_1 - r}\right] \quad (0 < r < R_1). \tag{4.3}$$

由是有

$$\log M\left(\frac{R_1}{2}, f\right) < A \overset{+}{\log} |f(0)| + B, \tag{4.4}$$

A 与 B 为数字常数。

他方面由哥西 (Cauchy) 积分得

$$\log |f'(0)| < \log M\left(\frac{R_1}{2}, f\right) - \log \frac{R_1}{2}. \tag{4.5}$$

于是，注意可設 $R_1 > 1$. 自式(4.3)及(4.5)遂可导得(4.2).

参　考　文　献

[1] 熊庆来: a. *Ann. Éc. Norm. Sop.*, t. LXXII (1955), Fasc. 2.
b. *C. R. Acad. Sc.*, t. 244 (1957), p. 1440.
c. 科学紀录，新輯 2 (1958), 6. 及中国科学 7 (1958), 987—1000.

[2] Schottky, F., *Sitzungsberichte*. Berl. 1940.

[3] Miranda, C., *Bull. de la, Soc. Math.*, 6 (1935).

[4] Nenanlinna, R., *Le théorème de Picard-Borel*. Paris, 1929.

[5] 謝暉春: 科学紀录，新輯 3 (1959), 6.

SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE CERCLE UNITÉ ADMETTANT DES VALEURS EXCEPTIONNELLES B†

Shieh Hui-chun

(*A L'Éocle Normale du Fou-kien*)

Résumé

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité; à l'aide de l'indice $N(r,\alpha)$, M. Hiong a défmit la valeur exceptionnelle B de α, pour f et dans le cas où f ne s'annule pas et admette 1 comme valeur exceptionnelle B, il a démontré un théorème de limitation analogue au théorème bien connu de Schottky. Dans le présent travail, nous substituons $f^{(k)}$ à f dans l'hypothèse relative à la valeur 1, et nous obtenons un théorème du type de celui de Miranda-Valiron. Pour la démonstration de ce théorème, nous suivons en principe la méthode par laquelle M. Hiong a donné sa nouvelle démontration au théorème de Miranda-Valiron. La limitation de $\log M(r,f)$ qu'il a trouvée est très précise, mais elle contient le terme en $\log \frac{1}{r}$ et la constante $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right|$; et il est désirrable, comme cet auteur l'a signalé, de pouvoir les éliminer. Ici, nous parvenons a cette amélioration en modifiant certains points de son procédé d'élimination. Nous étendons ensuite le théorème obtenu ainsi que celui donné par M. Hiong aux fonctions admettant deux valeurs exceptionnelles B.

Théorème I. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité; si elle ne s'annule pas et si sa dérivée $f^{(k)}$ admet 1 comme valeur exceptionnelle B, de sorte que pour $0 < r < 1$

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right) < \lambda' \log \frac{1}{1-r} \qquad (\lambda' > 0) \tag{α}$$

alors en supposant $f^{(k)}(0) \neq 1$, on a pour $0 < r < 1$ l'inégalité

$$\log M(r,f) < \frac{1}{1-r}\left[H_k \overset{+}{\log} |f(0)| + K_k \log \frac{2}{1-r}\right], \tag{1}$$

H_k et K_k étant des constantes numériques qui ne dépendent que de k et de λ'.

Théorème II. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité; si elle admet 0, et 1 comme valeurs exceptionnelles B, de sorte que pour $0 < r < 1$

$$N(r,0) < \lambda_1 \log \frac{1}{1-r}, \qquad N(r,1) < \lambda_2 \log \frac{1}{1-r} \qquad (\lambda_1, \lambda_2 > 0). \tag{β}$$

Alors, en supposant $f(0) \neq 0$ et $f(0) \neq 1$, on a pour $0 < r < 1$ l'inégalité analogue

† J'exprime ici ma vive gratitude à M. le Professeur Hiong pour les bons conseils et l'engouragement que j'ai reçus de lui au cours de ce travail.

(1). H et K étant des constantes numériques qui dépendent seulement du plus grand des nombres λ_1 et λ_2.

Théorème III. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité; si elle admet 0 et si sa dérivée $f^{(k)}$ admet 1 comme valeurs exceptionnelles B, de sorte que pour $0 < r < 1$

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) < \lambda_1' \log \frac{1}{1-r}, \qquad N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-1}\right) < \lambda_2' \log \frac{1}{1-r}, \qquad (\beta')$$

en supposant $f(0) \neq 0$ et $f^{(k)}(0) \neq 1$, on a pour $0 < r < 1$ l'inégalité analogue à (1), H_k et K_k étant des constantes numériques qui dépendent seulement de k et du plus grand des nombres λ_1' et λ_2'.

En s'appuyant sur certains de ces théorèmes, on peut démontrer alors quelques critères de normalité. Enfin nous obtenons encare der extensions du théorème bien connu de Landau.

第10卷 第2期　　数　学　学　报　　Vol. 10, No. 2
1960年6月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　June, 1960

具有二次代数极限环綫的方程*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 3} a_{ij}x^iy^j}{\sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 3} b_{ij}x^iy^j}$$

黄啓宇　　方初宝　　錢祥征
(西安交通大学)　(广西师范学院)　(湖南大学)

秦元勛[1]曾对方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{\sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 2} a_{ij}x^iy^j}{\sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 2} b_{ij}x^iy^j}$ 具有二次代数极限环的情况进行了研究，本文是在[1]的基础上給出了实系数微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 3} a_{ij}x^iy^j}{\sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 3} b_{ij}x^iy^j}=\frac{Y_3(x,y)}{X_3(x,y)} \qquad (\mathrm{E})_3$$

具有二个二次代数曲綫为极限环的充要条件，并解决了周期解的唯二性，稳定性和結构稳定性，同时对其扑拓結构进行分类，并給出了 $(\mathrm{E})_3$ 全局拓扑图形的代数判定方法，在証明定理时所用的若干方法，还可以进一步考虑 $\frac{dy}{dx}=\frac{Y_n(x,y)}{X_n(x,y)}$ 的方程.

引理 1. 微分方程 $(\mathrm{E})_3$ 具有二次代数曲綫 $F(x,y)=0$ 作为解的充要条件为 $(\mathrm{E})_3$ 可化为下面形式：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{F_x(x,y)Y_2(x,y)+(Ax+By+C)F(x,y)}{-F_y(x,y)Y_2(x,y)+(A'x+B'y+C')F(x,y)},$$

其中 $Y_2(x,y)$ 是 x,y 的二次多項式，$ABCA'B'C'$ 为任意常数.

証. 不失一般性．設 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，并假設

$$\begin{cases}Y_3=(Ax+By+C)F+Y_3',\\ X_3=(A'x+B''y+C')F+X_3',\end{cases}$$

其中：$Y_3'(x,y)$ 为不含 y^3 及常数項之三次多項式，

$X_3'(x,y)$ 为不含 x^3 及常数項之三次多項式.

因为 $F(x,y)=0$ 为解，故

$$[F_xX_3+F_yY_3]_{F(x,y)=0}\equiv 0, \qquad (1)$$

即

$$[xX_3'+yY_3']_{F(x,y)=0}\equiv 0. \qquad (1)'$$

令：

$$x=0,\ y=\pm 1 \quad 时可得 \quad Y_3'=xY_2',$$
$$y=0\quad x=\pm 1 \quad 时可得 \quad X_3'=yX_2.$$

* 1960年3月15日收到.

代入(1)′即得:

$$X_2 + Y_2' \equiv kF \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数}),$$

故

$$X_3(x, y) = (A'x + B''y + C')F + y(kF - Y_2')$$
$$= (A'x + B'y + C')F - yY_2'.$$

令 $Y_2' = 2Y_2$ 即得所要形式.

引理 2. 微分方程 $(\mathrm{E})_3$ 具有二个不相交的二次代数閉曲綫 $F = 0$, $G = 0$ (其中 $F = 0$ 为圆, $G = 0$ 为椭圆)作为解的充要条件为方程 $(\mathrm{E})_3$ 可化为下面形式:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k_1F_xG + k_2G_xF}{k_1F_yG + k_2G_yF},$$

其中 k_1, k_2 分别是不为零的常数.

証. 充分性是显然的,以下証明必要性.

我們先考虑特殊情形. 即設

$$F = x^2 + (y-a)^2 - 1 = 0,$$
$$G = \lambda x^2 + \mu y^2 - 1 = 0;$$

其中 $\lambda \neq \mu$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $a \neq 0$ 不妨設 $a > 0$. 因为 $F = 0$, $G = 0$ 为方程 $(\mathrm{E})_3$ 之解,则有

$$\begin{cases} \lambda xX_3 + \mu yY_3 \equiv GL_2, \\ xX_3 + (y-a)Y_3 \equiv FL_2'; \end{cases} \tag{2}$$

其中 L_2, L_2' 为二任意二次多項式.

令 $x = 0$ 时則有:

$$\begin{cases} \mu y[Y_3]_{x=0} \equiv (\mu y^2 - 1)[L_2]_{x=0}, \\ (y-a)[Y_3]_{x=0} \equiv [(y-a)^2 - 1][L_2']_{x=0}. \end{cases}$$

又因 $(\mu y^2 - 1)$ 与 $[(y-a)^2 - 1]$ 沒有公因子,否則必有 $F = 0$ 与 $G = 0$ 相切,这与原設 $F = 0$ 与 $G = 0$ 不相交相矛盾. 因此必有

$$Y_3 \equiv xY_2. \tag{3}$$

代入(2),并因 F 与 G 不含 x 因子故必有

$$\begin{cases} L_2 = xL_1, \\ L_2' = xL_1'; \end{cases} \tag{4}$$

其中 $L_1 = Ax + By + C$, $L_1' = A'x + B'y + C'$.

把(3),(4)代入(2)即得:

$$\begin{cases} \lambda X_3 + \mu yY_2 \equiv GL_1, \\ X_3 + (y-a)Y_2 \equiv FL_1'. \end{cases}$$

解得:

$$X_3 \equiv \frac{(y-a)L_1G - \mu yFL_1'}{(\lambda-\mu)y - a\lambda},$$

$$Y_2 \equiv \frac{\lambda FL_1' - GL_1}{(\lambda-\mu)y - a\lambda}$$
$$\equiv k_1\lambda F - k_2G + \frac{\lambda F\bar{L}_1' - G\bar{L}_1}{(\lambda-\mu)y - a\lambda}; \tag{5}$$

其中 $\bar{L}_1 = Ax + D$, $\bar{L}'_1 = A'x + D$, $k_1 = \dfrac{B'}{\lambda - \mu}$, $k_2 = \dfrac{B}{\lambda - \mu}$, $D = k_2 a\lambda + C$, $D' = k_1 a\lambda + C'$.

由(5)式必有

$$[\lambda F\bar{L}'_1 - G\bar{L}_1]_{y=\frac{a\lambda}{\lambda-\mu}} \equiv 0.$$

比較系数得：

$$\begin{cases} A = A', \quad D = D', \\ A[\lambda^2 + (a^2 - 1)\lambda\mu - \lambda + \mu] = 0, \\ D[\lambda^2 + (a^2 - 1)\lambda\mu - \lambda + \mu] = 0. \end{cases}$$

由于 $F = 0$ 与 $G = 0$ 不相切，故必有 $\lambda^2 + (a^2 - 1)\lambda\mu - \lambda + \mu \neq 0$. 因此有

$$A = A' = D = D' = 0,$$

即

$$\bar{L}_1 \equiv \bar{L}'_1 \equiv 0.$$

由(3)(5)立即得出定理所要求的形式.

現在我們来証明一般情形：

設 $F = 0$, $G = 0$ 是 $(\mathrm{E})_3$ 的解，由引理 1 得知：

$$Y_3 \equiv L_1F + F_xY_2 \equiv L'_1G + G_xY'_2, \tag{6}$$

$$X_3 \equiv \bar{L}_1F - F_yY_2 \equiv \bar{L}'_1G - G_yY'_2. \tag{6$'$}$$

从 $(6) \times G_y + (6)' \times G_x$ 得：

$$(G_yL_1 + G_x\bar{L}_1)F + Y_2(F_xG_y - F_xG_y) - (G_yL'_1 - G_x\bar{L}'_1)G \equiv 0. \tag{7}$$

为要証明命題，以下我們在复数域上加以研究，同时引入齐次坐标. 我們先考慮方程：

$$\begin{cases} G = 0, \\ F = 0, \\ F_xG_y - F_yG_x = 0 \end{cases}$$

无公根的情形.

因为二次代数方程 $G = 0$ 与 $F = 0$ 在复数域上必定有四个交点(包括无穷远点)，故由(7)式得知 $Y_2 = 0$ 是过 $G = 0$ 与 $F = 0$ 的四个交点的二次曲綫，即可写为如下形式：

$$Y_2 = c_1G + c_2F \quad (c_1, c_2 \text{ 为复参数}). \tag{8}$$

同理可得：

$$Y'_2 = c'_1G + c'_2F, \quad (c'_1, c'_2 \text{ 为复参数}). \tag{8$'$}$$

以(8)及(8)′代入(6)得：

$$Y_3 \equiv (L_1 + c_2F_x)F + c_1F_xG$$

$$\equiv (L'_1 + G_xc'_1)G + c'_2G_xF, \tag{9}$$

或

$$[(L_1 + c_2F_x) - c'_2G_x]F \equiv [(L'_1 + c'_1G_x) - c_1F_x]G.$$

由于 F 及 G 是实系数又不可約的二次多項式，故必有：

$$(L_1 + c_2F_x) \equiv c_2'G_x; \quad (L_1' + c_1'G_x) \equiv c_1F_x.$$

由(9)即得:

$$Y_3 \equiv c_2'G_xF + c_1F_xG.$$

同理可得:

$$X_3 \equiv -c_2'G_yF - c_1F_yG.$$

此即为定理所要求的形式.

最后我們討論方程

$$\begin{cases} F = 0, \\ G = 0, \\ F_xG_y - F_yG_x = 0 \end{cases}$$

有公根的情形. 即 $F = 0$ 与 $G = 0$ 有重交点的情况,不失一般性可以假設

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \tag{10}$$

$$G(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c. \tag{11}$$

应指出的是由于我們假定 $G = 0$ 是椭圓,故 $F = 0$ 与 $G = 0$ 不能有无限远的重交点,否则 $G = 0$ 必为圓. 因此可設其有有限交点,而因实系数方程 $G = 0$ 与 $F = 0$ 在实平面上原設不相交,故其交点是一对共軛的重交点,設为 $x = \alpha\pm\beta_i$ $y = \gamma\pm\delta_i$,又經坐标旋轉总可以使 $\beta = 0$,因此可設重交点为

$$\begin{cases} x_0 = \cosh\varphi > 1, \\ y_0 = \pm i\sinh\varphi \neq 0. \end{cases}$$

代入(10)式則得:

$$\begin{cases} ax_0^2 + by_0^2 + 2fx_0 + c = 0, & (12) \\ hx_0y_0 + g\,y_0 \qquad\qquad = 0. & (13) \end{cases}$$

又因为:

$$\frac{1}{4}(F_xG_y - F_yG_x) = h(x^2 - y^2) + (b-a)xy + g\,x - fy, \tag{14}$$

再把交点代入(11)則得:

$$\begin{cases} h(x_0^2 - y_0^2) + g\,x_0 = 0, & (15) \\ (b-a)x_0y_0 - fy_0 = 0. & (16) \end{cases}$$

因为行列式:

$$\begin{vmatrix} x_0y_0, & y_0 \\ x_0^2 - y_0^2 & x_0 \end{vmatrix} = y_0^3 \neq 0 \quad (\text{因为 } y_0 \neq 0),$$

故从(13)与(15)式得 $h = g = 0$.

因此 $G = 0$ 只可能是有一个軸在 x 軸上的椭圓. 因此問題化为上面已考慮过的特殊情形. 定理証毕.

推論. 如果微分方程 $(E)_3$ 有二个二次代数閉曲綫作为解,其中一个为圓,另一个为椭圓,則这二个閉解都不能是极限环.

証. 因为这时方程 $(E)_3$ 具有积分 $F^{k_1}G^{k_2} = C$ 在 $F \neq 0$ 及 $G \neq 0$ 时是解析的. 由 Ляпунов 定理知道,在 $F = 0$ 及 $G = 0$ 之內 $(E)_3$ 的奇点不可能是焦点,而是中心.

定理 1（存在性定理）．微分方程 $(E)_3$ 具有二个二次代数曲綫为极限环綫的充要条件是：$(E)_3$ 可經过非奇异实的綫性变换：

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y + \varepsilon, \\ y_1 = \gamma x + \delta y + \eta, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0. \tag{17}$$

化为下面形式：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(x^2+y^2-1)(Ax+By+C)-x[x^2+(y-a^2)-R^2](Ax+By+C')}{(y-a)(x^2+y^2-1)(Ax+By+C)-y[x^2+(y-a)^2-R^2](Ax+By+C')}, \quad (E)_3'$$

其中常数 A, B, C, C', a, R 满足条件：

〈1°〉 $a \neq 0$，且

$$|a| - R > 1 \quad 当\ |a| > 1,$$
$$|a| + R < 1 \quad 当\ |a| < 1;$$

〈2°〉　$C'^2 > A^2 + B^2$；　$\left|\dfrac{Ba + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| > R$；

〈3°〉　$A \neq 0$，　$C \neq C'$．

証． 条件是充分的．因为变换(17)不改变二次代数曲綫及极限环的性质，故只須研究 $(E)_3'$．記 $G = x^2 + y^2 - 1$，$F = x^2 + (y-a)^2 - R^2$．显然 $G = 0$，$F = 0$ 是方程(3)之解，且由条件〈1°〉知二圓 $G = 0$ 与 $F = 0$ 不相交，由〈2°〉知直綫 $Ax + By + C' = 0$ 与 $G = 0$；直綫 $Ax + By + C = 0$ 与 $F = 0$ 不相交，故 $F = 0$ 与 $G = 0$ 是 $(E)_3'$ 之二个周期解．

以下我們要証明 $F = 0$ 与 $G = 0$ 是方程 $(E)_3'$ 之二个代数极限环綫．改写 $(E)_3'$ 为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_y G(Ax + By + C) - G_y F(Ax + By + C') = X_3'(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -F_x G(Ax + By + C) + G_x F(Ax + By + C') = Y_3'(x, y). \end{cases} \quad \widetilde{(E)}_3'$$

并作輔助方程：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(x^2+y^2-1)(By+C)-x[x^2+(y-a)^2-R^2](By+C')}{(y-a)(x^2+y^2-1)(By+C)-y[x^2+(y-a)^2-R^2](By+C')}, \quad (E)_3''$$

或写为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_y G(By + C) - GyF(By + C') = X_3''(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -F_x G(By + C) + GxF(By + C') = Y_3''(x, y). \end{cases} \quad \widetilde{(E)}_3''$$

显然 $Y_3''(-x, y) = -Y_3''(x, y)$，$X_3''(-x, y) = X_3''(x, y)$．由对称原理知 $(E)_3''$ 之积分曲綫对称于 y 軸．

因 $G = 0$ 与 $F = 0$ 亦是 $(E)_3''$ 之周期解，故知 $(E)_3''$ 在二圓 $G = 0$ 与 $F = 0$ 之邻域存在一系列的周期解．

現在研究 $(E)_3'$ 与 $(E)_3''$ 相切之处，即研究：

$$0=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\widetilde{(\mathrm{E})_3''}}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\widetilde{(\mathrm{E})_3'}}-\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\widetilde{(\mathrm{E})_3}}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\widetilde{(\mathrm{E})_3''}}$$
$$=X_3''(x,y)Y_3'(x,y)-X_3'(x,y)Y_3''(x,y)$$
$$=4a(C'-C)Ax^2GF. \tag{18}$$

因为 $A\neq 0$，$a\neq 0$，$C'\neq C$；故 $(\mathrm{E})_3'$ 与 $(\mathrm{E})_3''$ 相切之处除在 $F=0$ 与 $G=0$ 这两公共解上外，只可能在 $x=0$ 上相切，但因为(18)中出現的項是 x^2，因此在 $x=0$ 上之切点 $(\mathrm{E})_3'$ 与 $(\mathrm{E})_3''$ 的积分曲綫亦相互穿过，我們視 $(\mathrm{E})_3''$ 在 $F=0$，$G=0$ 邻域存在之周期解为 $(\mathrm{E})_3'$ 之无切环綫．即得 $F=0$ 与 $G=0$ 是 $(\mathrm{E})_3'$ 之极限环．充分性証毕．

条件是必要的．首先由引理 2 的推論得出，如果方程 $(\mathrm{E})_3$ 存在有二个二次代数曲綫作为极限环，则經变换(17)把其中之一化为圓后，则另一个亦变为圓．以下我們推証其存在之必要形式，不失一般性，可設 $(\mathrm{E})_3$ 有二个代数曲綫：

$$\begin{cases}G=x^2+y^2-1,\\ F=x^2+(y-a)^2-R^2=0\end{cases}$$

为积分曲綫(这是因为經过綫性变换(17)并不改变二次代数极限环的性質)．故有

$$\begin{cases}2xX_3+2yY_3\equiv(x^2+y^2-1)L_2,\\ 2xX_3+2(y-a)Y_3\equiv[x^2+(y-a)^2-R^2]L_2',\end{cases} \tag{19}$$

其中 L_2; L_2' 为二次多項式．

令 $x=0$，由(19)即得：

$$[2yY_3]_{x=0}\equiv(y^2-1)L_2,$$
$$[2(y-a)Y_3]_{x=0}\equiv[(y-a)^2-R^2]L_2'.$$

因此有：

$$[Y_3]_{x=0;\,(y^2-1)[(y-a)^2-R^2]=0}\equiv 0.$$

但因 $F=0$ 与 $G=0$ 不相切，故有

$$Y_3(x,y)\equiv xY_2(x,y),$$

$Y_2(x,y)$ 是 x,y 之二次多項式．代入(19)即得：

$$L_2=x(Ax+By+C),\quad L_2'=x(A'x+B'y+C').$$

故(19)式化为：

$$\begin{cases}2X_3+2yY_2\equiv(x^2+y^2-1)(Ax+By+C),\\ 2X_3+2(y-a)Y_2\equiv[x^2+(y-a)^2-R^2](A'x+B'y+C').\end{cases} \tag{19$'$}$$

比較 x^3 与 y^3 之系数得 $A'=A$，$B'=B$．

設 $a\neq 0$ 时，则由(19)′解得：

$$X_3=\frac{1}{-4a}[2(y-a)G(Ax+By+C)-2yF(Ax+By+C')],$$

$$Y_3=\frac{x}{4a}[2G(Ax+By+C)-2F(Ax+By+C')],$$

此即为 $(\mathrm{E})_3'$ 的形式．

上面假定 $a\neq 0$ 是必要的，否则若 $a=0$，则同上可得 $X_3=yX_2$，故得：

$$\begin{cases}2X_2+2Y_2\equiv(x^2+y^2-1)B,\\ 2X_2+2Y_2\equiv(x^2+y^2-R^2)B'.\end{cases}$$

从此推出必有 $B = B' = 0$,故 $X_2 = -Y_2$. 即方程 $(E)_3$ 化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xX_2}{yX_2} = \frac{-x}{y},$$

此与 $G = 0$, $F = 0$ 为极限环之原設矛盾.

最后显然条件〈1°〉,〈2°〉是必要的,否则方程 $(E)_3$ 在 $F = 0$ 及 $G = 0$ 上有奇点. 条件〈3°〉亦是必要的,否则 $F = 0$, $G = 0$ 就不能为极限环. 定理証毕.

引理 3. 在定理 1 的条件下,方程 $(E)_3$ (亦即为 $(E)'_3$) 之奇点只可能在 y 軸上.

証. 如果不然,则当 $x \neq 0$ 时,有

$$\begin{cases} X_3(x, y) = X'_3(x, y) = F_yG(Ax + By + C) - G_yF(Ax + By + C') = 0, & (20) \\ Y_3(x, y) = Y'_3(x, y) = -F_xG(Ax + By + C) + G_xF(Ax+By+C') = 0. & (20)' \end{cases}$$

由(20)′得

$$F_xG(Ax + By + C) = G_xF(Ax + By + C').$$

代入(20)得

$$-a[x^2 + (y - a)^2 - R^2](Ax + By + C') = 0. \tag{21}$$

再代入(20)因 $a \neq 0$,故得

$$(x^2 + y^2 - 1)(Ax + By + C') = 0. \tag{22}$$

但由条件〈1°〉,〈2°〉,〈3°〉得知(21)与(22)二式不能同时成立. 得出矛盾. 因此 $(E)'_3$ 与輔助方程 $(E)''_3$ 之奇点只能在且重合于 y 軸上.

引理 4. 在定理 1 条件下,方程 $(E)'_3$ 与 $(E)''_3$ 的奇点只当 $X'_3(0, y) = 0$ 有二重根时所确定为具指数为零的高次奇点、三重根是指数为 $+1$ 的高次奇点外,均为一次奇点.

証. 由引理 3 得知方程 $(E)'_3$ 与 $(E)''_3$ 的奇点只能在 y 軸上,設 $(0, y^*)$ 是其奇点,则有:

$$\Delta = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial X'_3(x, y)}{\partial x}, & \dfrac{\partial X'_3(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y'_3(x, y)}{\partial x}, & \dfrac{\partial Y'_3(x, y)}{\partial y} \end{matrix}\right|_{(0, y^*)} = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial X''_3(x, y)}{\partial x}, & \dfrac{\partial X''_3(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y''_3(x, y)}{\partial x}, & \dfrac{\partial Y''_3(x, y)}{\partial y} \end{matrix}\right|_{(0, y^*)} = Y''_2(0, y^*)\frac{\partial X''_3(0, y^*)}{\partial y}$$

其中 $Y''_3(x, y) = xY''_2(x, y)$.

因 $Y''_2(x, y) = 0$ 与 $X''_3(x,y) = 0$ 不相交. 故 $Y''_2(0, y^*) \neq 0$;故当 $\dfrac{\partial X''_3(0, y^*)}{\partial y} \neq 0$ 时,即 y^* 是 $X''_3(0, y)=0$ 的单根时,有 $\Delta \neq 0$. 则$(0, y^*)$是一次奇点. 当 $\dfrac{\partial X''_3(0, y^*)}{\partial y} = 0$ 时,则 $(0, y^*)$ 是高次奇点. 又由于三次代数方程 $X''_3(x,y) = 0$,即

$$x^2 = \frac{-X''_3(0, y)}{y(C - C' + aB) - aC} \tag{23}$$

对称 y 軸，故当 $\dfrac{\partial X_3''(0, y^*)}{\partial y} = 0$ 而 $\dfrac{\partial^2 X_3''(0, y^*)}{\partial y^2} \neq 0$ 时 $(0, y^*)$ 是指数为零的高次奇点.

当 $\dfrac{\partial X_3''(0, y^*)}{\partial y} = 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 X_3''(0, y^*)}{\partial y^2} = 0$ 时，$(0, y^*)$ 是指数为 $+1$ 的高次奇点.

定理 2 (唯二性). 在定理 1 之条件下，方程 $(E)_3'$ 除存在有二个代数曲綫为极限环外，不可能有其它周期解.

証. 首先我們可以断言方程 $(E)_3''$ 之一次奇点只可能是中心或鞍点，这是因其积分曲綫对称 y 軸，則不能是焦点. 因 $Y_3''(0, y) = 0$，則 $(E)_3''$ 之方向場在 y 軸上之方向平行于 x 軸，故不能是結点，又由引理 4 及(23)得知具指数为 $+1$ 的高次奇点必为中心，具指数为 0 之高次奇点为半結半鞍型的高次奇点. 由于 $(E)_3'$ 与 $(E)_3''$ 之积分曲綫除在公共解 $F = 0$ 与 $G = 0$ 外均相互穿过，因此 $(E)_3''$ 之鞍点或半結半鞍型的高次奇点不可能变为 $(E)_3'$ 之中心或某一个极限环内之焦点，即 $(E)_3'$ 不可能有其他周期解. 否則可以 $(E)_3'$ 之异于 $F = 0$ 及 $G = 0$ 的周期解为 $(E)_3''$ 之无切环綫，則得其含有之奇点就不能是 $(E)_3''$ 之鞍点或半結半鞍型的高次奇点了，而必是焦点，这与 $(E)_3''$ 不能有焦点矛盾. 定理証毕.

定理 3 (稳定性). 在定理 1 的条件下：(1) 若 $|a| - R > 1$，当 $|a| > 1$ 时，$(E)_3'$ 存在的二个极限环同时稳定或同时不稳定. (2) 若 $|a| + R < 1$，当 $|a| < 1$ 时，$(E)_3'$ 存在的二个极限环稳定性相反，即一个稳定另一个便是不稳定的.

証. 考虑向量場 $\widetilde{(E)_3'}$ 与向量場 $\widetilde{(E)_3''}$ 之交角的正弦：

$$\sin\theta = -\frac{4Aa(C - C')x^2GF}{\sqrt{(X_3'(x, y))^2 + (Y_3'(x, y))^2} \cdot \sqrt{(X_3''(x, y))^2 + (Y_3''(x, y))^2}}. \tag{24}$$

上式分母在 $F = 0$, $G = 0$ 之邻域不为零，不妨設 $C > C'$, $a > 0$, $A < 0$.

則当(1) $|a| - R > 1$，当 $|a| > 1$ 时

在 $F > 0$, $G > 0$ 时有 $\sin\theta > 0$;

在 $F < 0$, $G < 0$ 时或 $G < 0$, $F > 0$ 时

有 $\sin\theta < 0$. 此表示 $(E)_3'$ 存在的二个极限环同时是稳定的.

(2) $|a| + R < 1$，当 $|a| < 1$ 时

在 $G > 0$ 时有 $\sin\theta > 0$;

在 $G < 0$, $F > 0$ 时有 $\sin\theta < 0$;

在 $F < 0$ 时有 $\sin\theta > 0$.

故 $G = 0$ 是 $(E)_3'$ 之稳定极限环；$F = 0$ 是不稳定的极限环. 定理証毕.

現在我們利用以上定理的結果，先研究 $(E)_3''$ 之图形，并由(24)之关系便可确定 $(E)_3'$ 之全局图形.

因 $(E)_3''$ 之奇点只能在 y 軸上，則在全平面上至多只有三个奇点，又因 $Y_3''(x, y) = xY_2''(x, y)$，故只要考虑代数方程：

$$Y_2''(0, y) = (C + 2aB - C')y^2 + [2aC' + (R^2 - a^2 - 1)B]y - C - (a^2 - R^2)C' = 0 \tag{25}$$

与方程：

$$X_3''(0, y) = (aB + C - C')y^3 - [aC - (R^2 - a^2 - 1)B - 2aC']y^2 + \\ + [aB - C - C'(a^2 - R^2)]y + aC = 0 \tag{26}$$

之根的分布关系便可确定奇点的性质[2]；例如若 $X_3''(0, y) = 0$ 有三个相异实根，又如果 $Y_2''(0, y) = 0$ 的根与之相互交錯，便可断定 $(\mathrm{E})_3''$ 之三个奇点都是中心（因其中已知至少有一个是中心）：我們可由其二次代数极限环綫及奇点的性質完全决定其拓扑結构，并可用代数方程：

$$X_3''(x, y) = 0,$$

即

$$x^2 = \frac{-X_3''(0, y)}{y(C - C' + aB) - aC}$$

及

$$Y_2''(x, y) = 0,$$

即

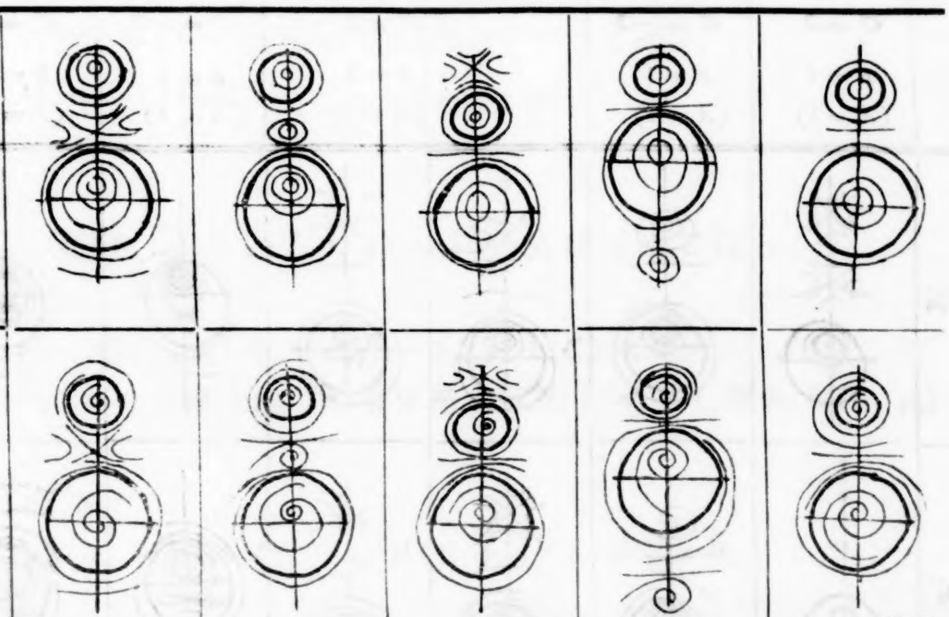
$$x^2 = \frac{Y_2(0, y)}{C' - C}$$

之对称于 y 軸的图形来判定 $(\mathrm{E})_3''$ 之全局拓扑图形． 代数方程(25)，(26)均有公式求解，从而得出如下定理：

定理 4. 在定理 1 之条件下，方程 $(\mathrm{E})_3$ 所确定的积分曲綫所有可能的拓扑結构分类如下，并且均給出可能情形的具体例子．

当 $|a| > 1$ 时[注 1]

分类： $(\mathrm{E})_3'$ ， $(\mathrm{E})_3''$



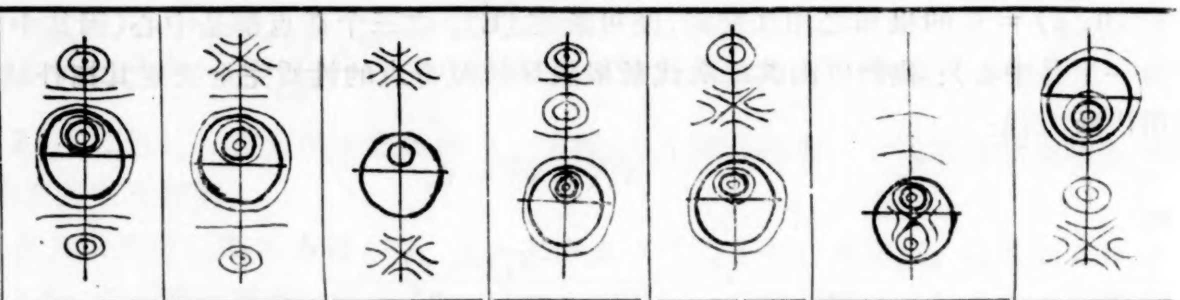
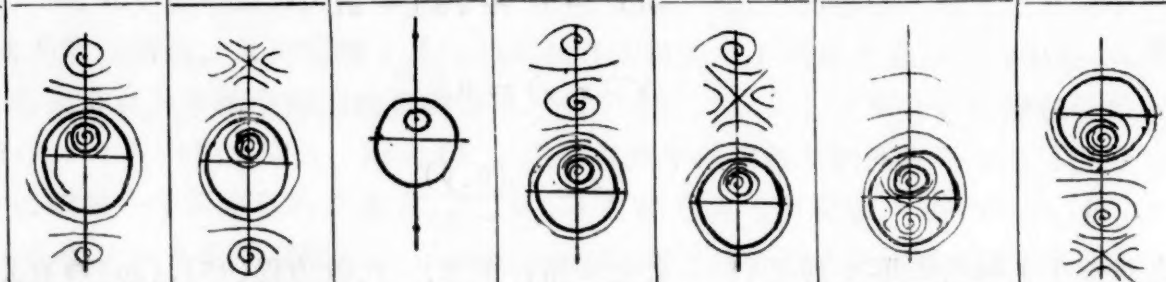
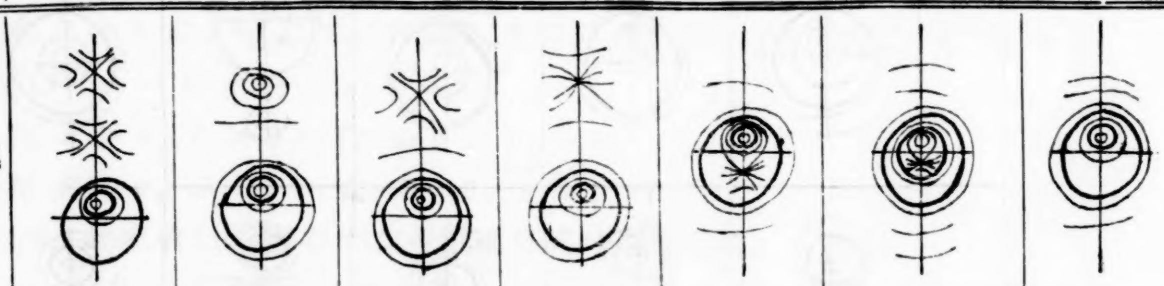
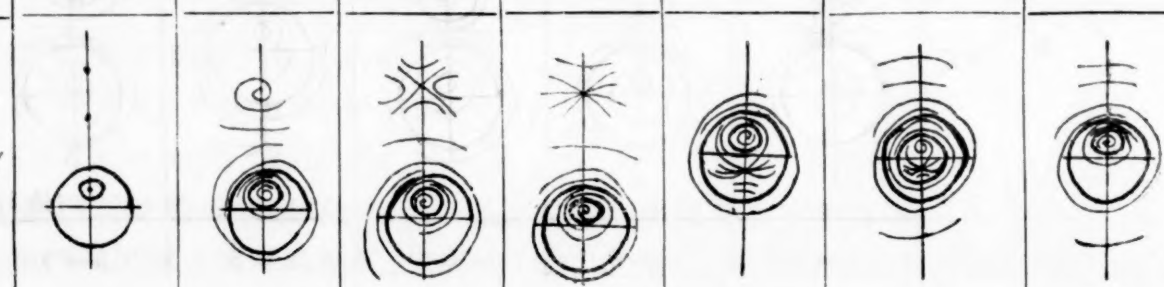
[注 2]

例子					
	$a = 3$	$a = 5$	$a = 5$	$a = 3$	$a = 3$
	$R = 1$	$R = 1$	$R = 2$	$R = 1$	$R = 1$
	$C = 0$	$C = -3$	$C = 0$	$C = 0$	$C = 0$
	$C' = -2$	$C' = -2$	$C' = 2$	$C' = 2$	$C' = 3$
	$B = 1$	$B = 1$	$B = 1$	$B = 1$	$B = 1$
	$(A = 1)$	$(A = 1)$	$(A = 1)$	$(A = 1)$	$(A = 1)$

注 1：当 $|a| > 1$ 时，$X_3''(0, y) = 0$ 不可能有重根，故不能有高次奇点．

注 2：当 $X_3''(0, y) = 0$ 退化为二次多项式的情形．

当 $|a|<1$ 时

分类	$(E)_3'$							
	$(E)_3''$							
例子		$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{9}$ $C=\frac{13}{8}$ $C'=2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{\sqrt{8}}$ $C=-\frac{25}{4}$ $C'=-2$ $B=1$ $(A=1)$	不可能 [注 3]	$a=-\frac{1}{100}$ $R=\frac{1}{100}$ $C=2+\frac{1}{200}$ $C'=2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{4}$ $C=-\frac{49}{20}$ $C'=-2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{4}$ $C=0$ $C'=2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=R=\frac{1}{3}$ $C=99$ $C'=100$ $B=1$ $(A=1)$
分类	$(E)_3'$							
	$(E)_3''$							
例子		不可能 [注 4]	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{\sqrt{8}}$ $C=-\frac{5}{2}$ $C'=-2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{4}$ $C=-\frac{5}{2}$ $C'=-2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{3}$ $R=\frac{1}{3}$ $C=-\frac{129}{40}$ $C'=-\frac{53}{15}$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{4}$ $C=0$ $C'=\frac{8}{3}$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{9}$ $R=\frac{1}{9}$ $C=-\frac{403}{11655}$ $C'=-\frac{37\times9^3-1}{16\times9^3-1}$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{3}$ $R=\frac{1}{3}$ $C=\frac{7}{3}$ $C'=\frac{8}{3}$ $B=1$ $(A=1)$

注 3： 在定理 1 的条件下，当 $|a|<1$ 时，如果 $(\mathrm{E})_3''$ 有二奇点 $P_0(0, y_0)$；$P_1(0, y_1)$，其中 $y_0 > +1$，$y_1 < -1$，则 P_0；P_1 不能同时是鞍点.

由(25)，(26)令 $B = 1$ 得

$$X_3''(0, y) = (a + C - C')y^3 - (1 + a^2 - R^2 + aC - 2aC')y^2 - $$
$$- (C - a + C'a^2 - C'R^2)y + aC = 0,$$
$$Y_2''(0, y) = (C - C' + 2a)y^2 - (1 + a^2 - R^2 - 2aC')y -$$
$$- (C - C'a^2 - C'R^2) = 0.$$

故 $X_3''(0,y) = 0$ 有根 y_0, y_1.

記 $Y_2''(0, y) = 0$ 的根为 $\bar{y}_0$, $\bar{y}_1$. 不妨設 $\bar{y}_0 < \bar{y}_1$. 由定理 1 之条件，特别因：

$$[x^2 + (y - a)^2 - R^2]_{x^2+y^2=1} = 1 - R^2 + a^2 - 2a\sin\theta < 0 \quad (-\infty < \theta < \infty).$$

故有：

$$X_3''(0, -1) = [(1 + a)^2 - R^2](C' - 1)\begin{cases} > 0 & \text{当 } C' > 1, \\ < 0 & \text{当 } C' < -1; \end{cases}$$

$$X_3''(0, +1) = (1 + C')[R^2 - (1 - a)^2]\begin{cases} > 0 & \text{当 } C' < -1, \\ < 0 & \text{当 } C' > 1. \end{cases}$$

不妨設 $C' > 1$；又由于 $y_0 > +1$，$y_1 < -1$，故有 $C - C' + a > 0$.

因此

$$\begin{aligned} Y_2''(0, +1) &= (1 + C')[R^2 - (1 - a)^2] < 0, \\ Y_2''(0, -1) &= (1 - C')[(1 + a)^2 - R^2] < 0. \end{aligned} \tag{27}$$

(1) 当 $a > 0$ 时，由(27)必有

$$\bar{y}_0 < -1, \quad \bar{y}_1 > 1.$$

記

$$X_3''(0, y) = yY_2''(0, y) - a(y^2 - 1)(y + C),$$

即得：

$$X_3''(0, \bar{y}_1) = -a(\bar{y}_1^2 - 1)(\bar{y}_1 + C) < 0.$$

故 $\bar{y}_1$ 把 $X_3''(0, y) = 0$ 之最大的二个根分开. 又因 $\bar{y}_1 < -1$，因此 $P_0(0, y_0)$ 必为中心.

(2) 当 $a < 0$ 时，因

$$Y_2''(0, -C) = (C - C')[(C + a)^2 - R^2] > 0.$$

故有

$$\bar{y}_0 + C > 0.$$

如果 $C - C' + 2a > 0$ 时，有

$$X_3''(0, \bar{y}_0) = -a(\bar{y}_0^2 - 1)(\bar{y}_0 + C) > 0;$$

如果 $C - C' + 2a < 0$ 时，由 $Y_2''(0, -C) > 0$，必有 $\bar{y}_0 < -C < \bar{y}_1 < -1$，并有

$$X_3''(0, \bar{y}_0) < 0; \quad X_3''(0, \bar{y}_1) > 0.$$

故必 $P_1(0, y_1)$ 是中心.

$B = 0$ 的情况可以类似的証明.

类似的方法可以証明：

注 4： 在定理 1 之条件下，方程 $(\mathrm{E})_3''$ 在 y 轴上任何二相邻奇点不能同时是鞍点.

引理 5. 在定理 1 之条件下，$(E)_3$ 存在的二次代数极限环綫之重次为 1.

証. 由于 $(E)_3$ 的二次代数极限环之重次經綫性变換不变，故仍可設极限环綫为：

$$G = x^2 + y^2 - 1 = 0;\quad F = x^2 + (y-a)^2 - R^2 = 0.$$

如下計算 $G = 0$ 之重次. 类似可以計算 $F = 0$ 之重次. 引入函数 $\tau(t)$ 使：

$$\begin{cases} x = \cos\tau(t), \\ y = \sin\tau(t) \end{cases} \tag{28}$$

构成 $\widetilde{(E)}'_3$ 的解. 则只要 $\tau(t)$ 满足微分方程：

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = [A\cos\tau(t) + B\sin\tau(t) + C][(\sin\tau(t) - a)^2 + \cos^2\tau(t) - R^2]. \tag{29}$$

由定理 1 之不相交条件知(29)式之右端为定号，即 $\tau(t)$ 是 t 的单調函数. 今計算重次. 即由：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \left[\frac{\partial X'_3}{\partial x} + \frac{\partial Y'_3}{\partial y}\right]_{(28)} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial X'_3}{\partial x} + \frac{\partial Y'_3}{\partial y}\right]_{(28)} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{(29)} d\tau \\ &= (C' - C)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\tau}{(-A\sin\tau + B\cos\tau + C)(\cos\tau + D)}\, d\tau, \end{aligned}$$

其中

$$D = \frac{a^2 - R^2 + 1}{-2a};$$

則有：

$$D^2 - 1 > 0,\quad (C - BD)^2 + B^2(D^2 - 1) \neq 0. \tag{30}$$

故：

$$\begin{aligned} I &= (C' - C)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4z}{[(D-1)z^2 + (D+1)][(C-B)z^2 - 2Az + (B+C)]}\, dz \\ &= \frac{2(C' - C)A\pi}{[(C - BD)^2 + B^2(D^2 - 1)]}\left[\sqrt{D^2 - 1} - \frac{DC - B}{\sqrt{C^2 - A^2 - B^2}}\right] \end{aligned}$$

$\neq 0$. 否則将与(30)矛盾.

故 $G = 0$ 为单重极限环.

定理 5 (結构的稳定性). 在定理 1 之条件下，微分方程 $(E)_3$ 結构稳定的充分且必要条件是代数方程 $X'_3(0, y) = 0$ 不具有重根(即 $(E)_3$ 不存在有高次奇点).

証. 因 $(E)_3$ 的二次代数极限环是单重的，又它不存中心且鞍点不多于一个，并且从(18)得出不可能有从一鞍点再回到此鞍点的积分曲綫，因此如果 $X'_3(0, y) = 0$ 沒有重根，即 $(E)'_3$ 不存在有重奇点(高次奇点). 則 $(E)_3$ 結构是稳定的.

必要性是显然的. 定理証毕.

本文是在秦元勛教授帮助和指导下完成的；并得到华罗庚教授的热情鼓励和帮助，作者在此表示衷心感謝.

参 考 文 献

[1] 秦元勋：具有二次代数极限环綫的方程：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sum\limits_{0\leq i+j\leq 2} a_{ij}x^iy^j}{\sum\limits_{0\leq i+j\leq 2} b_{ij}x^iy^j}$$

数学学报 **8**: 1 (1958), 23—35.

[2] Poincaré, H., *О. кривых определяемых дифференциальными уравнениями*, p. 33—47.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ $\frac{dy}{dx}=\frac{Y_3(x,y)}{X_3(x,y)}$, ОБЛАДАЮЩИХ КВАДРАТНЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ

Хуан Чи-юй,　　Фан Чу-пау,

(*Сианский цзяотунский университет*)　　(*Гуансиский педагогический институт*)

Цень Синь-чэнь

(*Хунанский университет*)

Резюме

Рассматрим дифференциальное уравнение с вещественными коэффициентами:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y_3(x,y)}{X_3(x,y)}=\frac{\sum\limits_{0\leq i+j\leq 3} a_{ij}\,x^iy^j}{\sum\limits_{0\leq i+j\leq 3} b_{ij}\,x^iy^j}. \qquad (E)_3$$

Лемма: Необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратные алгебраические замкнутые кривые $F=0$, $G=0$ (где $F=0$ эллипс, $G=0$. окружность) были решением дифференциального уравнения $(E)_3$, заключается в том, что $(E)_3$ имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{k_1F_xG+k_2FG_x}{k_1F_yG+k_2FG_y},$$

где k_1, k_2—ненульвые постоянные.

Теорема I (существование).

Необходимое и достаточное условие того, чтобы дифференциальное уравнение $(E)_3$ обладает двумя квадратными алгебраическими предельными циклами, заключается в том, что можно, при помощи линейного неособенного действительного преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y + \varepsilon, \\ y_1 = \gamma x + \delta y + \eta. \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0,$$

приводиться $(\mathrm{E})_3$ к следующему виду:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{matrix} x(x^2+y^2-1)(Ax+By+C) \\ -x[x^2+(y-a)^2-R^2](Ax+By+C') \end{matrix}}{\begin{matrix} (y-a)(x^2+y^2-1)(Ax+By+C) \\ -y[x^2+(y-a)^2-R^2](Ax+By+C') \end{matrix}},$$

Где A, B, C, C', a, R—постоянные, причём

$\langle 1^\circ \rangle$ $\quad a \neq 0$ и $|a| - R > 1$ при $|a| > 1$,

$\quad |a| + R < 1$ при $|a| < 1$;

$\langle 2^\circ \rangle$ $\quad C'^2 > A^2 + B^2, \quad \left|\dfrac{Ba + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| > R;$

$\langle 3^\circ \rangle$ $\quad A \neq 0, C \neq C'.$

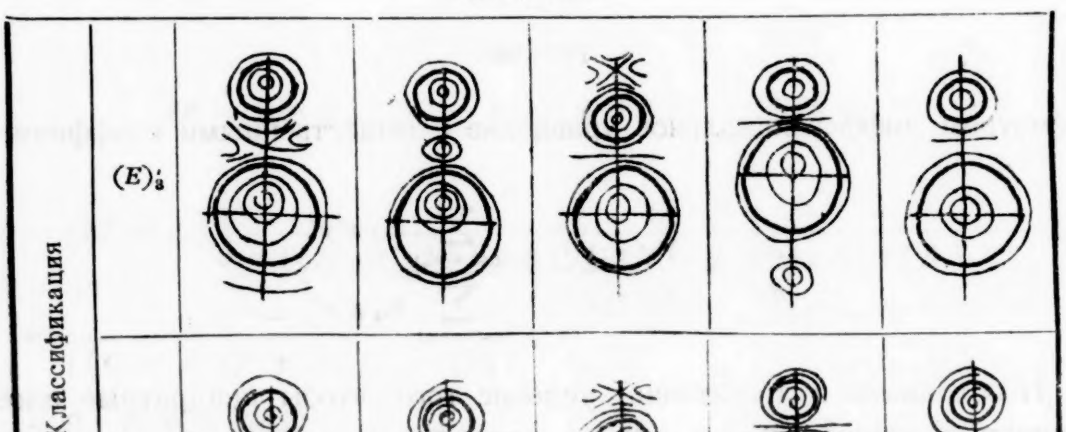
Теорема II (единственность).

При условиях теоремы I. уравнение $(\mathrm{E})_3$ отсутствует прочее периодическое решение, кроме обладания двумя квадратными алгебраическими предельными циклами.

Теорема III (устойчивость).

При $|a| > 1$

Классификация



Примеры

$a = 3$	$a = 5$	$a = 5$	$a = 3$	$a = 3$
$R = 1$	$R = 1$	$R = 2$	$R = 1$	$R = 1$
$C = 0$	$C = -3$	$C = 0$	$C = 0$	$C = 0$
$C' = -2$	$C' = -2$	$C' = 2$	$C' = 2$	$C' = 3$
$B = 1$	$B = 1$	$B = 1$	$B = 1$	$B = 1$
$(A = 1)$	$(A = 1)$	$(A = 1)$	$(A = 1)$	$(A = 1)$

При условиях теоремы I можно следовать:

(1) Для $|a| - R > 1$ при $|a| > 1$, оба квадратного алгебраического предельного цикла дифференциального уравнения $(E)_3$, в то же время, либо устойчивы либо неустойчивы.

(2) Для $|a| + R < 1$, при $|a| < 1$, устойчивость обоих квадратного алгебраического предельного цикла дифференциального уравнения $(E)_3$ противна. т. е. какда один из обоих был устойчивостью, то другой был неустойчивостью.

Исследуем алгебраическим методом топологическую структуру кривых, определяемых дифференциальным уравнениям $(E)_3$, получаем:

Теорема IV.

При условиях теоремы I классификация всевозможных топологических структур кривых, определяемых дифференциальным уравнениям $(E)_3$, записываться в следующей таблице; при этом, дадим конкретный пример каждому типу.

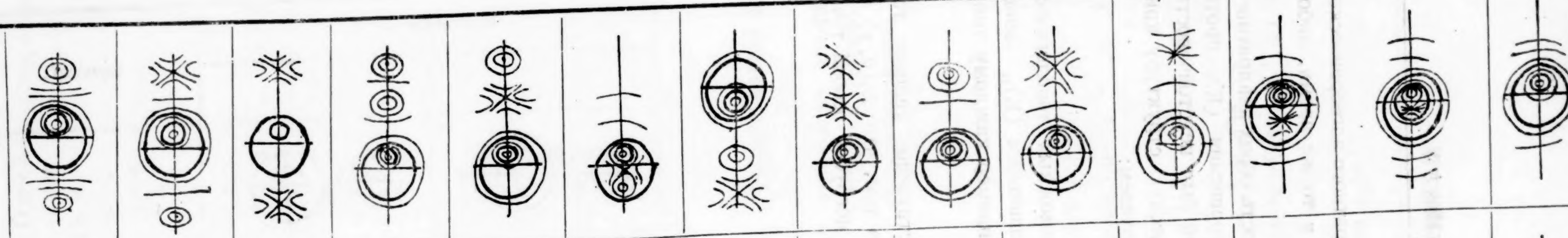
Теорема V.

При условиях теоремы I, необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнение $(E)_3$ был грубой системой, заключается в том, что $X_3(0, y) = 0$ не обладает кратным коренем (т. е. уравнения $(E)_3$ нет негрубой особой точки).

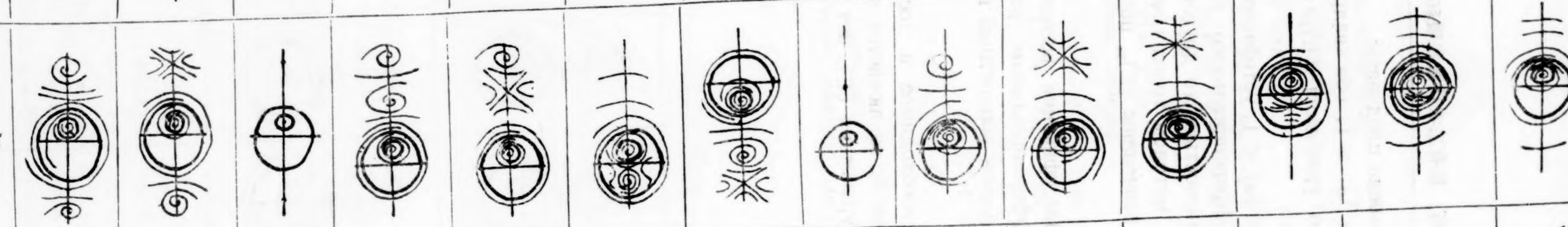
При $|a| < 1$

Классификация

$(E)'_3$



$(E)''_3$



Примеры

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{9}$ $C=\frac{13}{8}$ $C'=2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{\sqrt{8}}$ $C=-\frac{25}{4}$ $C'=-2$ $B=1$ $(A=1)$	Невозможно	$a=-\frac{1}{100}$ $R=\frac{1}{100}$ $C=2+\frac{1}{200}$ $C'=2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{4}$ $C=-\frac{49}{20}$ $C'=-2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{4}$ $C=0$ $C'=2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=R=\frac{1}{3}$ $C=99$ $C'=100$ $B=1$ $(A=1)$	Невозможно	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{\sqrt{8}}$ $C=-\frac{5}{2}$ $C'=-2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{4}$ $C=-\frac{5}{2}$ $C'=-2$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{3}$ $R=\frac{1}{3}$ $C=-\frac{129}{40}$ $C'=-\frac{53}{15}$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{2}$ $R=\frac{1}{4}$ $C=0$ $C'=\frac{8}{3}$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{9}$ $R=\frac{1}{9}$ $C=-\frac{403}{11655}$ $C'=-\frac{38\times 9^8-1}{16\times 9^8-1}$ $B=1$ $(A=1)$	$a=\frac{1}{3}$ $R=\frac{1}{3}$ $C=\frac{7}{3}$ $C'=\frac{8}{3}$ $B=1$ $(A=1)$

第10卷 第2期 数 学 学 报 Vol. 10, No. 2
1960 年 6 月 ACTA MATHEMATICA SINICA June, 1960

酉羣上的富理埃分析*

I. 富理埃級数的 Abel 求和及 Dirichlet 核

龔 昇
(中国科学技术大学)

目 次

§ 1.1. 引言

一个变数的 Fourier 分析，現在已經有了丰富的成果，不少問題得到了圓满而完整的解决，在很多人的研究中达到了很深刻的地步．当然，一个变数的 Fourier 分析在数学的不少其他領域起着重要的作用．可是多个变数的 Fourier 分析情况就不完全是如此，在有些內容上是有些不完整之处的．至于更一般的在任意紧致羣上的 Fourier 分析，那末，众所周知的，重要的結果只是 Peter-Weyl[6] 定理，它告訴我們說：紧致羣上的連續函数可以用有限綫性式来逼近之．最近，华罗庚[2]証明了酉羣上的連續函数的 Fourier 級数可以 Abel 求和于它自己．这是有关有限維(維数大于 1)的紧致羣上的函数的 Fourier 級数的第一条收斂定理．当然一条收斂定理是优于逼近定理的．

我們将以此为依据，对酉羣上的 Fourier 分析进行系統的研究．一个变数的 Fourier 分析可以看作一維酉羣上的 Fourier 分析，所以我們所研究的一般的酉羣上的 Fourier 分析，将一个变数的 Fourier 分析作为一个很特殊的例子，而一个变数的 Fourier 分析上所用的那些技巧，在此将不再起有影响的作用．同时，还須指出的是，任意紧致子羣上的連續函数可以推展成酉羣上的連續函数，以至对于酉羣上的 Fourier 分析进行研究，对于一般的紧致羣的情形也是有意义的． 这里及以后所用的主要思想是羣表示，这首先是由华罗庚所成功处理的．

本文是对于酉羣上可积函数的 Fourier 級数的研究的一部分成果． 主要是对华罗庚所定义的 Abel 求和进行进一步的研究，給出了 Abel 求和的具体表达式，此外，还給出了 Fourier 級数的 Dirichlet 核．

具体的說，在 § 1.3—§ 1.7 的这几节中，我們給出了 Abel 求和的最終具体表达式，这是經过很复杂的計算而得来的．§ 1.8 是用分析的方法求出了 Fourier 級数的 Dirichlet 核，

* 1960 年 5 月 6 日收到．

这是借助于 Abel 求和中的 Poisson 核而求得的. § 1.9 給于上述結果以另一个証明(代数的証明),这个証明是属于华罗庚的. 应用以前同样的方法,我們在 § 1.10 中定义了一种求和法,并定出了它們相应的核.

为了不使本文篇幅太长,关于以这些核为依据的收斂定理及求和定理,都将另文发表.

本文中所考虑的部分和及求和都是"方块"的,至于别种形式的求和(例如,球求和)将在另文重新加以討論. 文中所用符号与[1]中相同,处理問題的方法及技巧也是与[1]深切相关的,文中的結果是在科学記录上发表过的結果的一部分[4,5].

作者愿向导师华罗庚教授致以深切的感謝,本文是在他的指导下完成的,也愿向中国科学院数学研究所多复变数函数論討論班的同事們致謝,他們的宝貴意見,使我得益匪浅.

§ 1.2. 酉羣上的 Fourier 級数

設 U_n 是 n 阶酉羣. 若 $U \in U_n$, 我們以 $A_{f_1,\cdots,f_n}(U)$ 表示 U 的标記为 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的酉表示,这里 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是满足 $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n$ 的整数. 記 $N(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 为 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 的阶. 我們常用 f 来代表 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$. 若

$$A_f(U) = (a_{ij}(U))_{1\leqslant i,\, j\leqslant N(f)},$$

那末我們知道 $\{\varphi^f_{ij}(U)\}$ 是 U_n 上的就范直交系,这里

$$\varphi^f_{ij}(U) = \sqrt{\frac{N(f)}{C}}\, a^f_{ij}(U),$$

而 C 是 U_n 的体积,即

$$C = (2\pi)^{\frac{1}{2}n(n-1)}/((n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!)$$

$\{\varphi^f_{ij}\}$ 的全体对可积函数来講是完整的. 記

$$\Phi_f(U) = (\varphi^f_{ij}(U))_{1\leqslant i,j\leqslant N(f)} = \sqrt{\frac{N(f)}{C}}\, A_f(U).$$

若 $u(U)$ 是可积函数,展开成 Fourier 級数

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n} \mathrm{tr}\,(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)),$$

这里

$$C_{f_1\cdots f_n} = \int_{U_n} u(V)\Phi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\dot{V},$$

tr B 表示 B 的迹, B' 表示 B 的轉置.

更明白些,

$$u(U) \sim \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \mathrm{tr}\left(\frac{N(f)}{C}\int_{U_n} u(V)A_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}U')\dot{V}\right)$$

$$= \frac{1}{C}\int_{U_n} u(V) \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}U')\dot{V},$$

这里 $\chi_{f_1\cdots f_n}(U)$ 为表示 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 的特征.

首先我們很容易的可以証明 $u(U)$ 的 Fourier 級数等于它的实部,即

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \mathrm{tr}\,(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)) = \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \mathrm{Re\,tr}\,(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)).$$

若 $U \in U_n$, $V \in U_n$, 那末

$$u(VU) \sim \frac{1}{C}\int_{U_n} u(W) \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{W}U'V')\dot{W}$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W) A_{f_1\cdots f_n}(\overline{W}) A_{f_1\cdots f_n}(U') A_{f_1\cdots f_n}(V')\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} A_{f_1\cdots f_n}(U') A_{f_1\cdots f_n}(V')).$$

但是

$$u(\overline{V}U) \sim \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W) A_{f_1\cdots f_n}(\overline{W}U'\overline{V}')\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W) A_{-f_n,\cdots,-f_1}(W\overline{U}'V')\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W) A_{f_1\cdots f_n}(W) A'_{f_1\cdots f_n}(\overline{U}) A'_{f_1\cdots f_n}(V)\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}(\overline{C}_{f_1\cdots f_n} A'_{f_1\cdots f_n}(\overline{U}) A'_{f_1\cdots f_n}(V)),$$

这是因为

$$A_{f_1\cdots f_n}(U) = A_{-f_n\cdots -f_1}(\overline{U})$$

及

$$N(f_1\cdots f_n) = N(-f_n, \cdots, -f_1).$$

所以

$$\frac{u(VU) + u(\overline{V}U)}{2} \sim \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} (\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} A'_{f_1\cdots f_n}(U))] A'_{f_1\cdots f_n}(V)).$$

註 $V = I$, 即得

$$u(U) \sim \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{Re}\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)).$$

§1.3. Abel 求和

华罗庚[2]定义了在 n 阶酉羣 U_n 上可积函数 $u(U)$ $(U \in U_n)$ 的 Fourier 級数

$$\sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)) \tag{1.3.1}$$

的 Abel 和为

$$\sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \rho^f(r) \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n} \Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)), \tag{1.3.2}$$

这里

$$\rho^f(r) = \frac{1}{N(f)} \cdot \frac{1}{C}\int_{U_n} \frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I - rU)|^{2n}} \chi_f(U)\dot{U}. \tag{1.3.3}$$

并且証明了当 $r \to 1$ 时,(1.3.2)的値趋于 $u(U)$, 即(1.3.1)是可以 Abel 求和,其和为 $u(U)$.

至于 $\rho^f(r)$ 的值，他指出，

(i) $$\rho^f(r)\to 1,\quad \text{当}\quad r\to 1;$$

(ii) $$\rho^f(r)=\begin{cases} r^{f_1+\cdots+f_n} & \text{当}\quad f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0,\\ r^{-f_1-\cdots-f_n} & \quad 0\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_{n-1}\geqslant f_n.\end{cases}$$

我們要証明

定理 1.3.1. 当 $l_1>l_2>\cdots>l_s\geqslant 0>l_{s+1}>\cdots>l_n(n\geqslant s\geqslant 0)$ 时，那末

$$\rho^f(r)=r^{f_1+\cdots+f_s-f_{s+1}-\cdots-f_n}\sum_{s\geqslant g_{s+1}\geqslant\cdots\geqslant g_n\geqslant 0}\frac{N_s(f,g)N_s(g,f)}{N(f)N(g)}r^{2(g_{s+1}+\cdots+g_n)},\tag{1.3.4}$$

这里 $N_s(a,b)$ 表示 $N(a_1,\cdots,a_s,b_{s+1},\cdots,b_n)$，$g=(g_1,\cdots,g_n)$ 而 $(g_1+n-1,g_2+n-2,\cdots,g_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列． $0\geqslant g_1\geqslant g_2\geqslant\cdots\geqslant g_s\geqslant s-n$; $l_1=f_1+n-1,\cdots,l_{n-1}=f_{n-1}+1,\ l_n=f_n$.

$\rho^f(r)$ 还可以表成以下这些形式．

定理 1.3.2. 若 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列，而 $v_1>\cdots>v_s$，那末，

$$\rho^f(r)=r^{|l_1|+\cdots+|l_n|-\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{n-1\geqslant v_{s+1}>\cdots>v_n\geqslant 0}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=s+1}^{n}\frac{(l_j-v_k)(v_j-l_k)}{(v_j-v_k)(l_j-l_k)}r^{2(v_{s+1}+\cdots+v_n)}.\tag{1.3.5}$$

定理 1.3.3. 如同定理 1.3.1 中的假設，那末

$$\rho^f(r)=r^{f_1+\cdots+f_s-f_{s+1}-\cdots-f_n}\sum_{v=0}^{s(n-s)}b_v r^{2v},\tag{1.3.6}$$

这里

$$\begin{aligned} b_v&=\sum_{\substack{n-1\geqslant v_{s+1}>\cdots>v_n\geqslant 0\\ v_{s+1}+\cdots+v_n=v+\frac{(n-s)(n-s-1)}{2}}}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=s+1}^{n}\frac{(l_j-v_k)(v_j-l_k)}{(v_j-v_k)(l_j-l_k)}\\ &=\sum_{\substack{s\geqslant g_{s+1}\geqslant\cdots\geqslant g_n\geqslant 0\\ g_{s+1}+\cdots+g_n=v}}\frac{N_s(f,g)N_s(g,f)}{N(f)N(g)}.\end{aligned}$$

§ 1.4. $\rho^f(r)$ 的計算

在这几节中，我們将来証明上节中的这些定理．

首先我們看到(参閱[2])

$$\rho^f(r)N(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod_{v=1}^{n}|1-re^{i\theta_v}|^{2n}}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} e^{il_1\theta_1}, & \cdots, & e^{il_1\theta_n}\\ e^{il_2\theta_1}, & \cdots, & e^{il_2\theta_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ e^{il_n\theta_1}, & \cdots, & e^{il_n\theta_n}\end{vmatrix}\prod_{v<\mu}(e^{-i\theta_v}-e^{-i\theta_\mu})d\theta_1\cdots d\theta_n.\tag{1.4.1}$$

将(1.4.1)中被积函数的行列式展开，于是得到

$$\rho^{l}(r)N(f)=\sum\delta^{1,2,\cdots,n}_{a_1,a_2,\cdots,a_n}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}|1-re^{i\theta_\nu}|^{2n}}\cdot e^{i(l_{a_1}\theta_1+\cdots+l_{a_n}\theta_n)}D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{1.4.2}$$

上述积分进行变数变换，使 $l_{a_1}\theta_1+\cdots+l_{a_n}\theta_n$ 变成 $l_1\psi_1+\cdots+l_n\psi_n$，于是可以看出（为了簡便起見，我們常写 $\rho^{l}(r)$ 为 $\rho(r)$）。

$$\rho(r)N(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}|1-re^{i\theta_\nu}|^{2n}}\cdot e^{i(l_1\theta_1+\cdots+l_n\theta_n)}D(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{1.4.3}$$

在(1.4.3)中被积函数的行列式进行展开，于是

$$\rho(r)N(f)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\sum\delta^{0,1,\cdots,n-1}_{k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\cdot\frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}|1-re^{i\theta_\nu}|^{2n}}e^{i[(l_1-k_0)\theta_1+\cdots+(l_n-k_{n-1})\theta_n]}d\theta_1\cdots d\theta_n,$$

而这就是

$$\rho(r)N(f)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(1-r^2)^{n^2}\cdot\begin{vmatrix}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_1-0)\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_2-0)\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_n-0)\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_1-1)\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_2-1)\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_n-1)\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_1-(n-1))\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_2-(n-1))\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l_n-(n-1))\theta}d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2n}}\end{vmatrix}.$$

在上面这个行列式中，将第一列乘以 $C_0^{n-1}r^0(-1)^0$，第二列乘以 $C_1^{n-1}r^1(-1)^1$，$\cdots$，第 n 列乘以 $C_{n-1}^{n-1}r^{n-1}(-1)^{n-1}$，然后开始二列相加到第二列上，开始三列相加到第三列上，$\cdots$，开始 n 列相加到第 n 列上，于是得到

$$\rho(r)N(f)=(1-r^2)^{n^2}r^{-\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\begin{vmatrix}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_1\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^n}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_2\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^n}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_n\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^n}\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_1\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^{n-1}}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_2\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^{n-1}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_n\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^{n-1}}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_1\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_2\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_n\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})}\end{vmatrix}. \tag{1.4.4}$$

事实上,我們还可以从(1.4.3)更直接的来証明(1.4.4),从 $D(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的性質,我們知道

$$D(e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}) = r^{-\frac{1}{2}n(n-1)}D(re^{-i\theta_1}, \cdots, re^{-i\theta_n}) = r^{-\frac{1}{2}n(n-1)}D(re^{-i\theta_1} - 1, \cdots, re^{-i\theta_n} - 1) =$$

$$= (-r)^{-\frac{1}{2}n(n-1)}D(1 - re^{-i\theta_1}, \cdots, 1 - re^{-i\theta_n}) = (-r)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{i=1}^{n} (1-re^{-i\theta_i})^{n-1} D\left(\frac{1}{1-re^{-i\theta_1}}, \cdots, \frac{1}{1-re^{-i\theta_n}}\right).$$

将此式代入(1.4.3),得到

$$\rho(r)N(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^{n^2} e^{i(l_1\theta_1+\cdots+l_n\theta_n)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1-re^{i\theta_\nu})^n \prod\limits_{\nu=1}^{n}(1-re^{-i\theta_\nu})} \cdot D\left(\frac{1}{1-re^{-i\theta_1}}, \cdots, \frac{1}{1-re^{-i\theta_n}}\right) d\theta_1\cdots d\theta_n$$

对被积函数中的行列式展开,即得(1.4.4).

引入符号

$$\Lambda_{q_1,\cdots,q_n}^{p_1,\cdots,p_n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_1\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{q_1}(1-re^{-i\theta})^n}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_2\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{q_2}(1-re^{-i\theta})^n}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_n\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{q_n}(1-re^{-i\theta})^n} \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_1\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{q_1}(1-re^{-i\theta})^{n-1}}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_2\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{q_2}(1-re^{-i\theta})^{n-1}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_n\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{q_n}(1-re^{-i\theta})^{n-1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_1\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{q_1}(1-re^{-i\theta})}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_2\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{q_2}(1-re^{-i\theta})}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ip_n\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{-q_n}(1-re^{-i\theta})} \end{vmatrix}. \tag{1.4.5}$$

于是(1.4.4)就是

$$\rho(r)N(f) = (1-r^2)^{n^2} r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \Lambda_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n}. \tag{1.4.6}$$

§ 1.5. 几个代数恒等式

在这一节中,我們已經假定了

$$l_1 > l_2 > \cdots > l_s \geqslant 0 > l_{s+1} > \cdots > l_n \quad (n \geqslant s \geqslant 0),$$

由(1.4.5)的 Λ 的定义,我們立刻知道

$$\Lambda_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n} = \Lambda_{n,\cdots,n,n-1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n} + r\Lambda_{n,\cdots,n,n}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}.$$

但是

$$\Lambda_{n,\cdots,n,n-1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n} = \Lambda_{n,\cdots,n,n-2}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n} + r\Lambda_{n,\cdots,n,n-1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Lambda_{n,\cdots,n,1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n} = \Lambda_{n,\cdots,n,0}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n} + r\Lambda_{n,\cdots,n,1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}.$$

将这些恆等式一起相加，考虑到当 $l_n < 0$ 时，

$$\Lambda_{n,\cdots,n,0}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n} = 0,$$

于是我們得到恆等式

$$\Lambda_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n} = r\sum_{j=0}^{n-1}\Lambda_{n,\cdots,n,n-j}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1}. \tag{1.5.1}$$

但是

$$\Lambda_{n,\cdots,n,n-j}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1} = \Lambda_{n,\cdots,n,n-j-1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1} + r\Lambda_{n,\cdots,n,n-j}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2},$$

$$\Lambda_{n,\cdots,n,n-j-1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1} = \Lambda_{n,\cdots,n,n-j-2}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1} + r\Lambda_{n,\cdots,n,n-j-1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Lambda_{n,\cdots,n,1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1} = \Lambda_{n,\cdots,n,0}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1} + r\Lambda_{n,\cdots,n,1}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2}.$$

将这些恆等式相加，由于考虑到

$$\Lambda_{n,\cdots,n,0}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1} = 0,$$

所以

$$\Lambda_{n,\cdots,n,n-j}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+1} = r\sum_{k=j}^{n-1}\Lambda_{n,\cdots,n,n-k}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2},$$

以此式代入(1.5.1)即得

$$\Lambda_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n} = r^2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\Lambda_{n,\cdots,n,n-k}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2} = r^2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Lambda_{n,\cdots,n,n-k}^{l_1,\cdots,l_{n-1},l_n+2}.$$

継續应用上述的步驟．最后我們可以得到

$$\begin{aligned}\Lambda_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n} &= r^{-l_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)\cdots(k-l_n-1)}{(-l_n-1)!}\Lambda_{n,\cdots,n,n-k}^{l_1,\cdots,l_{n-1},0}\\ &= r^{-l_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k-l_n-1)!}{k!(-l_n-1)!}\Lambda_{n,\cdots,n,n-k}^{l_1,\cdots,l_{n-1},0}.\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

注意到 $l_1 > \cdots > l_s \geqslant 0 > l_{s+1} > \cdots > l_n$，我們在 (1.5.2) 的右边，再对 l_{n-1} 进行上述步驟，使之递加到 0，$\cdots$，一直到对 l_{s+1}，进行上述步驟，使之递加到 0，最后，我們得到

$$\Lambda_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n} = r^{-l_{s+1}-\cdots-l_n}\sum_{k_{s+1}=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{n-1}\frac{(k_{s+1}-l_{s+1}-1)!}{k_{s+1}!(-l_{s+1}-1)!}\cdots$$

$$\cdots\frac{(k_n-l_n-1)!}{k!(-l_n-1)!}\Lambda_{n,\cdots,n,n-k_{s+1},\cdots,n-k_n}^{l_1,\cdots,l_s,0,\cdots,0}. \tag{1.5.3}$$

§ 1.6. Λ 的值

为了計算 $\rho^l(r)$ 的值,我們根据(1.4.6),只要对 $\Lambda_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n}$ 进行計算即可，而 $\Lambda_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n}$ 根据(1.5.3)知道，只要求出 $\Lambda_{n,\cdots,n,n-k_{s+1},\cdots,n-k_n}^{l_1,\cdots,l_s,0,\cdots,0}$ 就可以了，但是 $\Lambda_{n,\cdots,n,n-k_{s+1},\cdots,n-k_n}^{l_1,\cdots,l_s,0,\cdots,0}$ 等于

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_1\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^n}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_s\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^n}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n-k_{s+1}}(1-re^{-i\theta})^n}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n-k_n}(1-re^{-i\theta})^n} \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_1\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^{n-1}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_s\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^{n-1}}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n-k_{s+1}}(1-re^{-i\theta})^{n-1}}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n-k_n}(1-re^{-i\theta})^{n-1}} \\ \cdots\cdots & & & & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & & & & \cdots\cdots \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_1\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{il_s\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})}, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n-k_{s+1}}(1-re^{-i\theta})}, & \cdots, & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n-k_n}(1-re^{-i\theta})}. \end{vmatrix} \tag{1.6.1}$$

为了对上述行列式进行計算,我們先証明下面的

引理 1.6.1. 若 $p \geqslant 0,\ q > 0,\ m > 0,\ 1 > r > 0$, 那末

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ip\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^q(1-re^{-i\theta})^m} = \frac{r^{-p}}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left(t^{m+p-1}(1-t)^{-q}\right)\right]_{t=r^2} \tag{1.6.2}$$

成立.

証. 因为 $1 > r > 0$, 所以

$$(1-re^{i\theta})^{-q} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q+k-1)!\,r^k e^{ik\theta}}{(q-1)!\,k!},$$

$$(1-re^{-i\theta})^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+l-1)!\,r^l e^{-il\theta}}{(m-1)!\,l!}.$$

于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ip\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^q(1-re^{-i\theta})^m} = \sum_{\substack{l-k=p\\ l\geqslant 0,\ k\geqslant 0}}\frac{(q+k-1)!\,(m+l-1)!\,r^{k+l}}{(m-1)!\,l!\,(q-1)!\,k!} = r^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q+k-1)!\,(m+k+p-1)!}{(m-1)!\,(k+p)!\,(q-1)!\,k!}\,r^{2k}.$$

考虑 $(1-t)^{-q}$ 的展开式，容易証明

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q+k-1)!(m+k+p-1)!}{(m-1)!(k+p)!(q-1)!k!}t^k=\frac{t^{-p}}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}(t^{m+p-1}(1-t)^{-q}).$$

而此即(1.6.2).

将(1.6.2)的值代入(1.6.1)，我們就得到 $\Lambda^{l_1,\cdots,l_s,0,\cdots,0}_{n,\cdots,n,n-k_{s+1},\cdots,n-k_n}$ 等于

$$\frac{r^{-l_1-l_2-\cdots-l_s}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!}\begin{vmatrix}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^{n+l_1-1}(1-t)^{-n}), \cdots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^{n+l_s-1}(1-t)^{-n}), \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^{n-1}(1-t)^{-n+k_{s+1}}), \cdots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^{n-1}(1-t)^{-n+k_n})\\ \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^{n+l_1-2}(1-t)^{-n}), \cdots, \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^{n+l_s-2}(1-t)^{-n}), \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^{n-2}(1-t)^{-n+k_{s+1}}), \cdots, \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^{n-2}(1-t)^{-n+k_n})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d^{0}}{dt^{0}}(t^{n+l_1-n}(1-t)^{-n}), \cdots, \frac{d^{0}}{dt^{0}}(t^{n+l_s-n}(1-t)^{-n}), \frac{d^{0}}{dt^{0}}(t^{n-n}(1-t)^{-n+k_{s+1}}), \cdots, \frac{d^{0}}{dt^{0}}(t^{n-n}(1-t)^{-n+k_n}).\end{vmatrix}\tag{1.6.3}$$

但是

$$\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}(t^{n+l-j}(1-t)^{-n})=\sum_{k=0}^{n-j}C_k^{n-j}(t^{n-j})^{(k)}(t^l(1-t)^{-n})^{(n-j-k)}$$

及

$$\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}(t^{n-j}(1-t)^{-n+v})=\sum_{k=0}^{n-j}C_k^{n-j}(t^{n-j})^{(k)}((1-t)^{-n+v})^{(n-j-k)}.$$

代入(1.6.3)，应用行列式的性質，立刻証得 $(t=r^2)$.

$$\Lambda^{l_1,\cdots,l_s,0,\cdots,0}_{n,\cdots,n,n-k_{s+1},\cdots,n-k_n}=$$
$$=\frac{r^{-l_1-\cdots-l_s+n(n-1)}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!}\cdot\begin{vmatrix}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^{l_1}(1-t)^{-n}), \cdots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^{l_s}(1-t)^{-n}), \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}((1-t)^{-n+k_{s+1}}), \cdots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}((1-t)^{-n+k_n})\\ \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^{l_1}(1-t)^{-n}), \cdots, \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^{l_s}(1-t)^{-n}), \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}((1-t)^{-n+k_{s+1}}), \cdots, \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}((1-t)^{-n+k_n})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d^{0}}{dt^{0}}(t^{l_1}(1-t)^{-n}), \cdots, \frac{d^{0}}{dt^{0}}(t^{l_s}(1-t)^{-n}), \frac{d^{0}}{dt^{0}}((1-t)^{-n+k_{s+1}}), \cdots, \frac{d^{0}}{dt^{0}}((1-t)^{-n+k_n}).\end{vmatrix}.$$

应用华罗庚的一条定理([1],定理 1.2.4),可以知道上式右边等于

$$\frac{r^{-l_1\cdots l_s+n(n-1)}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!}$$

$$\lim_{\substack{t_1\to t\\ \cdots\cdots\\ t_n\to t}}\cdot\begin{vmatrix} t_1^{l_1}(1-t_1)^{-n}, & \cdots, & t_1^{l_s}(1-t_1)^{-n}, & (1-t_1)^{-n+k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_1)^{-n+k_n}\\ t_2^{l_1}(1-t_2)^{-n}, & \cdots, & t_2^{l_s}(1-t_2)^{-n}, & (1-t_2)^{-n+k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_2)^{-n+k_n}\\ \cdots\cdots & & & & & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & & & & & \cdots\cdots\\ t_n^{l_1}(1-t_n)^{-n}, & \cdots, & t_n^{l_s}(1-t_n)^{-n}, & (1-t_n)^{-n+k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_n)^{-n+k_n}\end{vmatrix}\Big/ D(t_1,\cdots,t_n)=$$

$$= r^{-l_1-\cdots-l_s+n(n-1)}(1-t)^{n^2}$$

$$\lim_{\substack{t_1\to t\\ \cdots\cdots\\ t_n\to t}}\cdot\begin{vmatrix} t_1^{l_1}, & \cdots, & t_1^{l_s}, & (1-t_1)^{k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_1)^{k_n}\\ t_2^{l_1}, & \cdots, & t_2^{l_s}, & (1-t_2)^{k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_2)^{k_n}\\ \cdots\cdots & & & & & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & & & & & \cdots\cdots\\ t_n^{l_1}, & \cdots, & t_n^{l_s}, & (1-t_n)^{k_{s+1}}, & \cdots, & (1-t_n)^{k_n}\end{vmatrix}\Big/ D(t_1,\cdots,t_n). \tag{1.6.4}$$

以(1.6.4)代入(1.5.3),注意到

$$g_p(t)=\frac{1}{(-p-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k-p-1)!}{k!}(1-t)^k=\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu^p t^\nu,$$

而

$$p<0,\ A_\nu^p=\frac{(-1)^\nu(n-p-1)!}{(\nu-p)\cdot\nu!\,(-p-1)!\,(n-\nu-1)!}. \tag{1.6.5}$$

我們有

$$\Lambda_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n}=r^{-l_1-\cdots-l_n+n(n-1)}(1-r^2)^{-n^2}$$

$$\lim_{\substack{t_1\to t\\ \cdots\cdots\\ t_n\to t}}\cdot\begin{vmatrix} t_1^{l_1}, & \cdots, & t_1^{l_s}, & g_{l_{s+1}}(t_1), & \cdots, & g_{l_n}(t_1)\\ t_2^{l_1}, & \cdots, & t_2^{l_s}, & g_{l_{s+1}}(t_2), & \cdots, & g_{l_n}(t_2)\\ \cdots\cdots & & & & & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & & & & & \cdots\cdots\\ t_n^{l_1}, & \cdots, & t_n^{l_s}, & g_{l_{s+1}}(t_n), & \cdots, & g_{l_n}(t_n)\end{vmatrix}\Big/ D(t_1,\cdots,t_n). \tag{1.6.6}$$

我們来証明(1.6.5),首先我們注意到一个代数恒等式

$$\sum_{r=0}^{s}\frac{(r+l)!}{r!}=\frac{(s+l-1)}{(l+1)\cdot s!}, \tag{1.6.7}$$

这里 s, l 都是正整数。

証. 显然

$$\sum_{r=0}^{s}\frac{(r+l+1)!}{r!}=\sum_{r=1}^{s}\frac{(r+l)!}{(r-1)!}+(l+1)\sum_{r=0}^{s}\frac{(r+l)!}{r!}=$$

$$=\sum_{r=0}^{s-1}\frac{(r+l+1)!}{r!}+(l+1)\sum_{r=0}^{s}\frac{(r+l)!}{r!},$$

立得(1.6.7).

$$g_p(t)=\frac{1}{(-p-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k-p-1)!}{k!}(1-t)^k=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k-p-1)!}{k!(-p-1)!}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{k!(-t)^\nu}{(k-\nu)!\nu!}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(k-p-1)!(-t)^\nu}{(-p-1)!(k-\nu)!\nu!}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{k=\nu}^{n-1}\frac{(k-p-1)!(-t)^\nu}{(-p-1)!(k-\nu)!\nu!}.$$

所以

$$A_\nu^p=\sum_{k=\nu}^{n-1}\frac{(k-p-1)!(-1)^\nu}{(-p-1)!(k-\nu)!\nu!}=\frac{(-1)^\nu}{\nu!(-p-1)!}\sum_{r=0}^{n-\nu-1}\frac{(r+\nu-p-1)!}{r!}$$
$$(\text{取 } k-\nu=r).$$

在(1.6.7)中取 $s=n-\nu-1$, $l=\nu-p-1$, 于是得到

$$A_\nu^p=\frac{(-1)^\nu(n-p-1)!}{\nu!(-p-1)!(n-\nu-1)!(\nu-p)}$$

而这就是(1.6.5). 由[1]中的定理,我們知道(1.6.6)就是

$$A_{n,\cdots,n}^{l_1,\cdots,l_n}=r^{-l_1-\cdots-l_n+n(n-1)}(1-r^2)^{n^2}\cdot$$
$$\cdot\begin{vmatrix}\frac{d^{n-1}t^{l_1}}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1}t^{l_s}}{dt^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}g_{l_{s+1}}(t)}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1}g_{l_n}(t)}{dt^{n-1}}\\ \frac{d^{n-2}t^{l_1}}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2}t^{l_s}}{dt^{n-2}}, & \frac{d^{n-2}g_{l_{s+1}}(t)}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2}g_{l_n}(t)}{dt^{n-2}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t^{l_1}, & \cdots, & t^{l_s}, & g_{l_{s+1}}(t), & \cdots, & g_{l_n}(t)\end{vmatrix}. \tag{1.6.8}$$

§1.7. §1.3 中的定理的証明

将(1.6.8)的值代入(1.4.6),于是就得到

$$\rho(r)N(f)=\frac{r^{-l_1-\cdots-l_n+\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!}\sum_{\nu_{s+1}=0}^{n-1}\cdots\sum_{\nu_n=0}^{n-1}A_{\nu_{s+1}}^{l_{s+1}}\cdots A_{\nu_n}^{l_n}\cdot$$
$$\cdot\begin{vmatrix}\frac{d^{n-1}t^{l_1}}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1}t^{l_s}}{dt^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}t^{\nu_{s+1}}}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1}t^{\nu_n}}{dt^{n-1}}\\ \frac{d^{n-2}t^{l_1}}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2}t^{l_s}}{dt^{n-2}}, & \frac{d^{n-2}t^{\nu_{s+1}}}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2}t^{\nu_n}}{dt^{n-2}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t^{l_1}, & \cdots, & t^{l_s}, & t^{\nu_{s+1}}, & \cdots, & t^{\nu_n}\end{vmatrix}. \tag{1.7.1}$$

从(1.7.1)可以看出

$$\rho(r)N(f)=\frac{r^{-l_1-\cdots-l_n+\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!}\sum_{n-1\geq\nu_{s+1}>\cdots>\nu_n\geq 0}B^{l_{s+1},\cdots,l_n}_{\nu_{s+1},\cdots,\nu_n}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\frac{d^{n-1}t^{l_1}}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1}t^{l_s}}{dt^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}t^{\nu_{s+1}}}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1}t^{\nu_n}}{dt^{n-1}}\\ \frac{d^{n-2}t^{l_1}}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2}t^{l_s}}{dt^{n-2}}, & \frac{d^{n-2}t^{\nu_{s+1}}}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2}t^{\nu_n}}{dt^{n-2}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t^{l_1}, & \cdots, & t^{l_s}, & t^{\nu_{s+1}}, & \cdots, & t^{\nu}\end{vmatrix}, \tag{1.7.2}$$

这里

$$B^{l_{s+1},\cdots,l_n}_{\nu_{s+1},\cdots,\nu_n}=\begin{vmatrix}A^{l_{s+1}}_{\nu_{s+1}}, & A^{l_{s+1}}_{\nu_{s+2}}, & \cdots, & A^{l_{s+1}}_{\nu_n}\\ A^{l_{s+2}}_{\nu_{s+1}}, & A^{l_{s+2}}_{\nu_{s+2}}, & \cdots, & A^{l_{s+2}}_{\nu_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A^{l_n}_{\nu_{s+1}}, & A^{l_n}_{\nu_{s+2}}, & \cdots, & A^{l_n}_{\nu_n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{(-1)^{\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n}(n-l_{s+1}-1)!\cdots(n-l_n-1)!}{\nu_{s+1}!\cdots\nu_n!\,(-l_{s+1}-1)!\cdots(-l_n-1)!\,(n-\nu_{s+1}-1)!\cdots(n-\nu_n-1)!}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\frac{1}{\nu_{s+1}-l_{s+1}}, & \cdots, & \frac{1}{\nu_n-l_{s+1}}\\ \frac{1}{\nu_{s+1}-l_{s+2}}, & \cdots, & \frac{1}{\nu_n-l_{s+2}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{\nu_{s+1}-l_n}, & \cdots, & \frac{1}{\nu_n-l_n}\end{vmatrix}.$$

应用[1]中的定理 1.1.3. 我們得到

$$B^{l_{s+1},\cdots,l_n}_{\nu_{s+1},\cdots,\nu_n}=\frac{(-1)^{\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n}(n-l_{s+1}-1)!\cdots(n-l_n-1)!}{\nu_{s+1}!\cdots\nu_n!\,(-l_{s+1}-1)!\cdots(-l_n-1!)}\times$$

$$\times\frac{D(\nu_{s+1},\cdots,\nu_n)D(-l_{s+1},\cdots,l_n)}{(n-\nu_{s+1}-1)!\cdots(n-\nu_n-1)!\prod_{i=1}^{n-s}\prod_{j=1}^{n-s}(\nu_{s+i}-l_{s+j})}=$$

$$=(-1)^{\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n}\frac{(n-l_{s+1}-1)!}{(-l_{s+1}-1)!\,n!}n!\frac{(n-1)!}{\nu_{s+1}!\,(n-\nu_{s+1}-1)!}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(n-1)!}\cdots\frac{(n-l_n-1)!}{(-l_n-1)!\,n!}n!\frac{(n-1)!}{\nu_n!\,(n-\nu_n-1)!}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(n-1)!}\frac{D(\nu_{s+1},\cdots,\nu_n)D(-l_{s+1},\cdots,-l_n)}{\prod_{i=s+1}^{n}\prod_{k=s+1}^{n}(\nu_i-l_k)}=$$

$$= (-1)^{\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n} n^{n-s} \prod_{j=s+1}^{n} C_n^{n-l_j-1} C_{\nu_j}^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{D(\nu_{s+1}, \cdots, \nu_n) D(-l_{s+1}, \cdots, -l_n)}{\prod\limits_{j=s+1}^{n} \prod\limits_{k=s+1}^{n} (\nu_j - l_k)}. \tag{1.7.3}$$

另一方面,由于

$$N(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \lim_{\substack{x_1 \to 1 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to 1}} \frac{M_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x_1, \cdots, x_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}.$$

我們得到

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} t^{l_1}}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1} t^{l_s}}{dt^{n-1}}, & \frac{d^{n-1} t^{\nu_{s+1}}}{dt^{n-1}}, & \cdots, & \frac{d^{n-1} t^{\nu_n}}{dt^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2} t^{l_1}}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2} t^{l_s}}{dt^{n-2}}, & \frac{d^{n-2} t^{\nu_{s+1}}}{dt^{n-2}}, & \cdots, & \frac{d^{n-2} t^{\nu_n}}{dt^{n-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t^{l_1}, & \cdots, & t^{l_s}, & t^{\nu_{s+1}}, & \cdots, & t^{\nu_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\substack{t_1 \to t \\ \cdots\cdots \\ t_n \to t}} \begin{vmatrix} t_1^{l_1}, & \cdots, & t_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{l_s}, & \cdots, & t_n^{l_s} \\ t_1^{\nu_{s+1}}, & \cdots, & t_n^{\nu_{s+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{\nu_n}, & \cdots, & t_n^{\nu_n} \end{vmatrix} \Big/ D(t_1, \cdots, t_n) =$$

$$= t^{l_1+\cdots+l_s+\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n - \frac{1}{2}n(n-1)} N(f_1, \cdots, f_s, \nu_{s+1} + s + 1 - n, \cdots, \nu_n). \tag{1.7.4}$$

将(1.7.4)代入(1.7.2),即得

$$\rho(r) N(f) = r^{|l_1|+\cdots+|l_n| - \frac{n(n-1)}{2}} \sum_{n-1 \geqslant \nu_{s+1} > \cdots > \nu_n \geqslant 0} B_{\nu_{s+1}, \cdots, \nu_n}^{l_{s+1}, \cdots, l_n} N(f_1, \cdots, f_s, \nu_{s+1} + s +$$

$$+ 1 - n, \cdots, \nu_n) r^{2(\nu_{s+1}+\cdots+\nu_n)}. \tag{1.7.5}$$

我們注意到二个重要而显然的代数恆等式

$$C_n^{n-l_k-1} = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} (\nu_j - l_k)$$

及

$$\nu_k! \, (n - \nu_k - 1)! = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (\nu_j - \nu_k)(-1)^{\nu_k},$$

以此代入(1.7.3),得到

$$B^{l_{s+1},\cdots,l_n}_{v_{s+1},\cdots,v_n} = (-1)^{v_{s+1}+\cdots+v_n} \prod_{k=s+1}^{n}\left[\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}(v_j - l_k)(n-1)! \Big/ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(v_j - v_k)(-1)^{v_k}\right]\times$$

$$\times \frac{n^{n-s} D(-l_{s+1},\cdots,l_n)\, D(v_{s+1},\cdots,v_n)}{\prod_{j=s+1}^{n}\prod_{k=s+1}^{n}(v_j - l_k)} =$$

$$= \frac{D(-l_{s+1},\cdots,-l_n) D(v_{s+1},\cdots,v_n) \prod_{k=s+1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(v_j - l_k)}{\prod_{k=s+1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(v_j - v_k)\prod_{j=s+1}^{n}\prod_{k=s+1}^{n}(v_j - l_k)} =$$

$$= \frac{D(-l_{s+1},\cdots,-l_n)\prod_{k=s+1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(v_j - l_k)}{\prod_{k=s+1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(v_j - v_k) D(v_{s+1},\cdots,v_n)} =$$

$$= \frac{D(v_1,\cdots,v_s,l_{s+1},\cdots,l_n)}{D(v_1,\cdots,v_s,v_{s+1},\cdots,v_n)}, \tag{1.7.6}$$

这里 $v_1 > v_2 > \cdots > v_s$, 而 $(v_1,\cdots,v_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列. 从 (1.7.6) 及注意到

$$N(\mu_1,\cdots,\mu_n) = \frac{D(\mu_1+n-1,\mu_2+n-2,\cdots,\mu_{n-1}+1,\mu_n)}{D(n-1,n-2,\cdots,1,0)},$$

我們立刻得到定理 1.3.1. 按照 $N(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ 的定义及

$$D(x_1,\cdots,x_n) = \prod_{j<k}(x_j - x_k)$$

的定义, 我們經过化簡手續后, 就可以得到定理 1.3.2. 至于定理 1.3.3 的証明, 可以直接从定理 1.3.1 及 1.3.2 中将指数相同的項相归并而得之.

作为定理 1.3.1 及 1.3.2 的推論,我們有如下的代数恆等式:

設 $n \geqslant s \geqslant 0$, $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n$, $l_j = f_j + n - j$, $j = 1,\cdots,n$ 那末

$$\sum_{s\geqslant g_{s+1}\geqslant\cdots\geqslant g_n\geqslant 0}\frac{N_s(f,g)N_s(g,f)}{N(f)N(g)} = 1, \tag{1}$$

这里 $g = (g_1,g_2,\cdots,g_n)$, $(g_1+n-1, g_2+n-2,\cdots,g_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列, $0 \geqslant g_1 \geqslant g_2 \geqslant \cdots \geqslant g_s \geqslant s-n$.

$$\sum_{n-1\geqslant v_{s+1}>\cdots>v_n\geqslant 0}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=s+1}^{n}\frac{(l_j - v_k)(v_j - l_k)}{(v_j - v_k)(l_j - l_k)} = 1, \tag{2}$$

这里 $(v_1,\cdots,v_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的一个排列,而 $v_1 > \cdots > v_s$.

当然(1)与(2)是二个有趣的恆等式.

可以驗証 § 1.3 中的 $\rho^l(r)$ 的性質(ii)是满足的.

从定理 1.3.1 等,我們自然可以得到 Tauberian 型的收斂定理,为了不使篇幅太长,将在另文中叙述并証明之.

§ 1.8. Dirichlet 核

現在考虑可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 級数

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)). \tag{1.8.1}$$

的部分和

$$S_N^{(u)}(U) = \sum_{N\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -N} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)), \tag{1.8.2}$$

这里 $l_1 = f_1 + n - 1,\ l_2 = f_2 + n - 2,\ \cdots,\ l_n = f_n$.

我們将要証明

定理 1.8.1. 可积函数 $u(U)$ 的 Fourier 級数(1.8.1)的部分和(1.8.2)可以表为

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\mathscr{D}_N(V)\dot{V},$$

这里 $\mathscr{D}_N(V)$ 是 Dirichlet 核，它等于

$$\frac{(-i)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!\,D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\begin{vmatrix} d_N(\theta_1), & \cdots, & d_N(\theta_n) \\ d'_N(\theta_1), & \cdots, & d'_N(\theta_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ d_N^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & d_N^{(n-1)}(\theta_n) \end{vmatrix},$$

这里 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$ 是 $\overline{V}$ 的特征根，$d_N(\theta) = \dfrac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$ 就是一个变数的 Dirichlet 核.

証. 首先从 § 1.2, 我們看到 (1.8.1) 就是

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\dot{V}, \tag{1.8.3}$$

所以(1.8.2)也就是

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\sum_{N\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -N} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\dot{V}.$$

我們来計算

$$\sum_{N\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -N} N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}).$$

从(1.3.2)及(1.8.3)知道，所謂級数(1.8.1)的 Abel 求和就是

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \rho^f(r)N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V})\dot{V}. \tag{1.8.4}$$

由 [2] 及(1.8.4)，知道

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n} \rho^f(r)N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}) = \frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I - r\overline{V}')|^{2n}}.$$

于是，从 $\chi_f(\overline{V})$ 的定义，我們知道，若 $e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}$ $(\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n)$ 是 $\overline{V}$ 的特征根，

那末

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})} \sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n} \rho^l(r) N(l) M_{l_1\cdots l_n}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) =$$

$$= \frac{(1-r^2)^{n^2}}{|1-re^{i\theta_1}|^{2n}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2n}},$$

这里

$$M_{l_1\cdots l_n}(x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1} \\ x_1^{l_2}, & \cdots, & x_n^{l_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix}.$$

考虑 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 的函数

$$g(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \frac{D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})(1-r^2)^{n^2}}{|1-re^{i\theta_1}|^{2n}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2n}}, \tag{1.8.5}$$

展开成多重 Fourier 級数，

$$\sum_{\infty\geq\nu_1,\cdots,\nu_n\geq-\infty} a_{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)}. \tag{1.8.6}$$

研究它的部分和

$$\sum_{\nu_1=-N}^{N}\cdots\sum_{\nu_n=-N}^{N} a_{\nu_1\cdots\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} g(\psi_1, \cdots, \psi_n)\prod_{j=1}^{n} d_N(\psi_j-\theta_j)\, d\psi_1\cdots d\psi_n, \tag{1.8.7}$$

这里

$$d_N(\theta) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

即是一个变数的 Dirichlet 核.

由于

$$\frac{D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})(1-r^2)^{n^2}}{|1-re^{i\theta_1}|^{2n}\cdots|1-re^{i\theta_n}|^{2n}} =$$

$$= \sum_{l_1>\cdots>l_n} \rho^l(r) N(l)\left(\sum_{\mu} \delta^{1,2,\cdots,n}_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n} e^{i(l_{\mu_1}\theta_1+l_{\mu_2}\theta_2+\cdots+l_{\mu_n}\theta_n)}\right) =$$

$$= \sum_{\infty\geq\nu_1,\cdots,\nu_n\geq-\infty} a_{\nu_1,\cdots,\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1+\cdots+\nu_n\theta_n)},$$

可以看出(1.8.7)的左边就是

$$\sum_{N\geq l_1>l_2>\cdots>l_n\geq-N} \rho^l(r) N(l) M_{l_1\cdots l_n}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}). \tag{1.8.8}$$

于是

$$\sum_{N\geq l_1>l_2>\cdots>l_n\geq -N} \rho^f(r)N(f)\chi_{l_1\cdots l_n}([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}])=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{D(e^{i\psi_1},\cdots,e^{i\psi_n})}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\cdot$$

$$\cdot\frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod_{\nu=1}^{n}|1-re^{i\psi_\nu}|^{2n}}\prod_{j=1}^{n}d_N(\psi_j-\theta_j)\,d\psi_1\cdots d\psi_n \tag{1.8.9}$$

应用以前我們一再使用的积分技巧，可以証明(1.8.9)的右边就是

$$\frac{(1-r^2)^{n^2}}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\cdot\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{2\pi\geq\psi_1\geq\psi_2\geq\cdots\geq\psi_n\geq 0}\frac{D(e^{i\psi_1},\cdots,e^{i\psi_n})}{\prod_{j=1}^{n}|1-re^{i\psi_j}|^{2n}}$$

$$P(\psi_1,\cdots,\psi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)\,d\psi_1\,d\psi_2,\cdots,d\psi_n, \tag{1.8.10}$$

而 $P(\psi_1,\cdots,\psi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 是

$$\begin{vmatrix} d_N(\psi_1-\theta_1), & \cdots, & d_N(\psi_1-\theta_n)\\ d_N(\psi_2-\theta_1), & \cdots, & d_N(\psi_2-\theta_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_N(\psi_n-\theta_1), & \cdots, & d_N(\psi_n-\theta_n)\end{vmatrix}.$$

将(1.8.10)的右边的积分对酉羣的旁系积分，于是得到

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\cdot\frac{1}{C}\int_{U_n}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I-r\overline{W}')|^{2n}}\cdot\frac{P(\psi_1,\cdots\psi_n,\theta_1,\cdots\theta_n)}{D(e^{-i\psi_1},\cdots,e^{-i\psi_n})}\dot{W}, \tag{1.8.11}$$

註 $r\to 1$，于是 $\rho^f(r)\to 1$，这样 (1.8.8) 就是 $S_N^{(n)}(U)$，而 (1.8.11) 根据調和函数理論[3]，当 $r\to 1$ 时，这就是

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\lim_{\substack{\psi_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ \psi_n\to 0}}\frac{P(\psi_1,\cdots,\psi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)}{D(e^{-i\psi_1},\cdots,e^{-i\psi_n})},$$

而这就是

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\lim_{\substack{\psi_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ \psi_n\to 0}}\frac{P(\psi_1,\cdots,\psi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n)}{D(\psi_1,\cdots,\psi_n)}\cdot\frac{D(\psi_1,\cdots,\psi_n)}{D(e^{-i\psi_1},\cdots,e^{-i\psi_n})},$$

应用 [1] 中的定理 1.2.4, 即得 $\mathscr{D}_N(v)$ 等于

$$\frac{(-i)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(n-1)!\cdots 2!\,1!\,D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})}\begin{vmatrix} d_N(\theta_1), & \cdots, & d_N(\theta_n)\\ d_N'(\theta_1), & \cdots, & d_N'(\theta_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_N^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & d_N^{(n-1)}(\theta_n)\end{vmatrix}.$$

§ 1.9. Dirichlet 核的代数証明

这一节的内容是属于华罗庚的。作者証明了定理 1.8.1 之后，华罗庚給出了一个如下的簡单的代数証明，而且他的証明并不依賴于 Poisson 核。

由于定义，我們知道

$$\sum_{N\geq l_1>\cdots>l_n\geq -N} N(f)M_{l_1\cdots l_n}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})=$$

$$=\sum_{N\geq l_1>l_2>\cdots>l_n\geq -N}\begin{vmatrix}1, & 1, & \cdots, & 1\\ l_1, & l_2, & \cdots, & l_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ l_1^{n-1}, & l_2^{n-1}, & \cdots, & l_n^{n-1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1^{l_1}, & \cdots, & \lambda_n^{l_1}\\ \lambda_1^{l_2}, & \cdots, & \lambda_n^{l_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1^{l_n}, & \cdots, & \lambda_n^{l_n}\end{vmatrix}\Big/ D(n-1,\cdots,1,0), \tag{1.9.1}$$

这里 $\lambda_1=e^{i\theta_1}$, $\lambda_2=e^{i\theta_2}$, $\cdots$, $\lambda_n=e^{i\theta_n}$。

由于行列式展开的对称性，将 $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 进行另外一种排列，(1.9.1)的右边的值不变，所以

$$\sum_{N\geq l_1>\cdots>l_n\geq -N} N(f)M_{l_1\cdots l_n}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})=$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{l_1=-N}^{N}\cdots\sum_{l_n=-N}^{N}\begin{vmatrix}1, & 1, & \cdots, & 1\\ l_1, & l_2, & \cdots, & l_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ l_1^{n-1}, & l_2^{n-1}, & \cdots, & l_n^{n-1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1^{l_1}, & \cdots, & \lambda_n^{l_1}\\ \lambda_1^{l_2}, & \cdots, & \lambda_n^{l_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1^{l_n}, & \cdots, & \lambda_n^{l_n}\end{vmatrix}\Big/ D(n-1,\cdots,1,0)=$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{l_1=-N}^{N}\cdots\sum_{l_n=-N}^{N}\begin{vmatrix}\lambda_1^{l_1}+\lambda_1^{l_2}+\cdots+\lambda_1^{l_n}, & l_1\lambda_1^{l_1}+l_2\lambda_1^{l_2}+\cdots+l_n\lambda_1^{l_n}, & \cdots, & l_1^{n-1}\lambda_1^{l_1}+l_2^{n-1}\lambda_1^{l_2}+\cdots+l_n^{n-1}\lambda_1^{l_n}\\ \lambda_2^{l_1}+\lambda_2^{l_2}+\cdots+\lambda_2^{l_n}, & l_1\lambda_2^{l_1}+l_2\lambda_2^{l_2}+\cdots+l_n\lambda_2^{l_n}, & \cdots, & l_1^{n-1}\lambda_2^{l_1}+l_2^{n-1}\lambda_2^{l_2}+\cdots+l_n^{n-1}\lambda_2^{l_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_n^{l_1}+\lambda_n^{l_2}+\cdots+\lambda_n^{l_n}, & l_1\lambda_n^{l_1}+l_2\lambda_n^{l_2}+\cdots+l_n\lambda_n^{l_n}, & \cdots & l_1^{n-1}\lambda_n^{l_1}+l_2^{n-1}\lambda_n^{l_2}+\cdots+l_n^{n-1}\lambda_n^{l_n}\end{vmatrix}\Big/ D(n-1,\cdots,1,0). \tag{1.9.2}$$

将(1.9.2)的右边的分子析成 n^2 个行列式，那末，这些行列式都成为如下的形式：

$$\sum_{l_1=-N}^{N}\cdots\sum_{l_n=-N}^{N}\begin{vmatrix} \lambda_1^{l_{\nu_1}}, & \lambda_2^{l_{\nu_1}}, & \cdots, & \lambda_n^{l_{\nu_1}} \\ l_{\nu_2}\lambda_1^{l_{\nu_2}}, & l_{\nu_2}\lambda_2^{l_{\nu_2}}, & \cdots, & l_{\nu_2}\lambda_n^{l_{\nu_2}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ l_{\nu_n}^{n-1}\lambda_1^{l_{\nu_n}}, & l_{\nu_n}^{n-1}\lambda_2^{l_{\nu_n}}, & \cdots, & l_{\nu_n}^{n-1}\lambda_n^{l_{\nu_n}} \end{vmatrix}, \tag{1.9.3}$$

这里 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 中取值，显然 (1.9.3) 中所有的行列式都等于零，除了 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列，于是

$$\sum_{N\geq l_1>\cdots>l_n\geq -N} N(f)M_{f_1\cdots f_n}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) =$$

$$= \sum_{l_1=-N}^{N}\cdots\sum_{l_n=-N}^{N}\begin{vmatrix} \lambda_1^{l_1}, & \lambda_2^{l_1}, & \cdots, & \lambda_n^{l_1} \\ l_2\lambda_1^{l_2}, & l_2\lambda_2^{l_2}, & \cdots, & l_2\lambda_n^{l_2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ l_n^{n-1}\lambda_1^{l_n}, & l_n^{n-1}\lambda_2^{l_n}, & \cdots, & l_n^{n-1}\lambda_n^{l_n} \end{vmatrix} \Big/ D(n-1, \cdots, 1, 0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{-N}^{N}\lambda_1^l, & \sum_{-N}^{N}\lambda_2^l, & \cdots, & \sum_{-N}^{N}\lambda_n^l \\ \sum_{-N}^{N} l\lambda_1^l, & \sum_{-N}^{N} l\lambda_2^l, & \cdots, & \sum_{-N}^{N} l\lambda_n^l \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{-N}^{N} l^{n-1}\lambda_1^l, & \sum_{-N}^{N} l^{n-1}\lambda_2^l, & \cdots, & \sum_{-N}^{N} l^{n-1}\lambda_n^l \end{vmatrix} \Big/ D(n-1, \cdots, 1, 0) =$$

$$= \frac{1}{i^{\frac{1}{2}n(n-1)}D(n-1, \cdots, 1, 0)}\begin{vmatrix} d_N(\theta_1), & d_N(\theta_2), & \cdots, & d_N(\theta_n) \\ d_N'(\theta_1), & d_N'(\theta_2), & \cdots, & d_N'(\theta_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ d_N^{(n-1)}(\theta_1), & d_N^{(n-1)}(\theta_2), & \cdots, & d_N^{(n-1)}(\theta_n) \end{vmatrix}.$$

这就証明了定理 1.8.1，显然，这个証明比起 § 1.8 中的証明来要簡洁而直接，但 § 1.8 中的証明是一种处理矩陣积分有用的方法，因此途径虽为曲折一些，还是写了出来。

§ 1.10. 求和法的一种定义及它的核

前面二节所用来証明 Dirichlet 核的方法，立刻建議我們对于酉羣 U_n 上可积函数的 Fourier 級数，可以作出一个一般的求和法来，并且可以应用前二节的方法容易地求出它們的核来。

設 $u(\theta)$ 是在 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 上可积的函数，它的 Fourier 級数是

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_p e^{ip\theta}, \tag{1.10.1}$$

T 是一种求和法,求和

$$\tau_m = \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_{mp} a_p e^{ip\theta},$$

它的核是

$$k_m(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_{mp} e^{ip\theta} \tag{1.10.2}$$

(当然,我們假設核是存在的,即(1.10.2)是收斂的)假使当 m 趋于极限时,$\tau_m \to s$,那末(1.10.1)称为可以 T 求和,其和为 s.

根据这些,我們来对 U_n 上的可积函数的 Fourier 級数,給出一种求和法的

定义 1.10.1. 設 $u(U)$ 为在 U_n 上可积的函数,它的 Fourier 級数为

$$\sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \operatorname{tr}\left(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)\right), \tag{1.10.3}$$

作和

$$\tau_m = \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n} \mu_{m,l_1} \mu_{m,l_2} \cdots \mu_{m,l_n} \operatorname{tr}\left(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)\right),$$

若当 m 趋于极限时,$\tau_m \to s$,那末我們称(1.10.3)可以 T 求和,其和为 s.

例 1.10.1. (α 次 Cesèro 求和,$\alpha > -1$)

$$\tau_N = \sum_{N \geqslant l_1 > \cdots > l_n \geqslant -N} A^{\alpha}_{l_1} \cdots A^{\alpha}_{l_n} \operatorname{tr}\left(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)\right),$$

这里

$$A^{\alpha}_{l_j} = \frac{\Gamma(\alpha + N - |l_j| + 1)\Gamma(N+1)}{\Gamma(\alpha + N + 1)\Gamma(N - |l_j| + 1)}.$$

例 1.10.2. (Abel-Poisson 求和)[1)]

$$\tau_r = \sum_{f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n} r^{|l_1| + \cdots + |l_n|} \operatorname{tr}\left(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)\right).$$

应用証明定理 1.8.1 的方法可以証明如下的

定理 1.10.1. 由定义 1.10.1 所給出的 T 求和法的核 $K_m(V)$ 为

$$\frac{(-i)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!\,2!\cdots(n-1)!\,D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})} \begin{vmatrix} k_m(\theta_1), & \cdots, & k_m(\theta_n) \\ k'_m(\theta_1), & \cdots, & k'_m(\theta_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ k_m^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & k_m^{(n-1)}(\theta_n) \end{vmatrix}, \tag{1.10.4}$$

这里 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ 是 $\overline{V}$ 的特征根. $k_m(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_{mp} e^{ip\theta}$ 是一个变数的 Fourier 級数的 T 求和法的核.

証. 我們知道(1.8.5)的多重 Fourier 級数为(1.8.6),求(1.8.6)的和

$$\sum_{\infty \geqslant \nu_1, \cdots, \nu_n \geqslant -\infty} a_{\nu_1, \cdots, \nu_n} \mu_{m,\nu_1} \mu_{m,\nu_2} \cdots \mu_{m,\nu_n} e^{i(\nu_1\theta_1 + \cdots + \nu_n\theta_n)}, \tag{1.10.5}$$

---

1) 注意这与 § 1.3 中华罗庚所定义的 Abel 求和是不同的.

于是，这就是

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} g(\psi_1, \cdots, \psi_n)\prod_{j=1}^{n} k_m(\psi_j-\theta_j)\, d\psi_1\cdots d\psi_n,$$

这里 $k_m(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}\mu_{mp}e^{ip\theta}$ 为一个变数的 Fourier 級数的 T 求和法的核.

可以看出(1.10.5)就是

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n}\mu_{m,l_1}\cdots\mu_{m,l_n}\rho^f(r)N(f)M_{f_1\cdots f_n}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}),$$

因之,

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n}\mu_{m,l_1}\cdots\mu_{m,l_n}\rho^f(r)N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}([e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}])=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{D(e^{i\psi_1}, \cdots, e^{i\psi_n})}{D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{\prod_{\nu=1}^{n}|1-e^{i\psi_\nu}|^{2n}}\prod_{j=1}^{n}k_m(\psi_j-\theta_j)\, d\psi_1\cdots d\psi_n. \tag{1.10.6}$$

应用以往我們慣用的技巧(1.10.6)的右边就是

$$\frac{(1-r^2)^{n^2}}{D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\psi_1\geqslant\cdots\geqslant\psi_n}\cdots\int\frac{D(e^{i\psi_1}, \cdots, e^{i\psi_n})}{\prod_{j=1}^{n}|1-re^{i\psi_j}|^{2n}}Q(\psi_1, \cdots, \psi_n, \theta_1, \cdots, \theta_n)\times$$

$$\times\, d\psi_1\cdots d\psi_n, \tag{1.10.7}$$

而 $Q(\psi_1, \cdots, \psi_n, \theta_1, \cdots, \theta_n)$ 是

$$\begin{vmatrix} k_m(\psi_1-\theta_1), \cdots, k_m(\psi_1-\theta_n) \\ k_m(\psi_2-\theta_1), \cdots, k_m(\psi_2-\theta_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_m(\psi_n-\theta_1), \cdots, k_m(\psi_n-\theta_n) \end{vmatrix}.$$

将(1.10.7)对酉羣的旁系积分，于是得到

$$\frac{1}{D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})}\cdot\frac{1}{C}\int_{U_n}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I-r\overline{W}')|^{2n}}\cdot\frac{Q(\psi_1\cdots\psi_n, \theta_1\cdots\theta_n)}{D(e^{-i\psi_1}, \cdots, e^{-i\psi_n})}\dot{W}.$$

註 $r\to 1$，由于 $\rho^f(r)\to 1$，应用与 § 1.8 中一样的方法，即得定理 1.10.1.

当然定理 1.10.1 还可以用 § 1.9 中的方法給与一个代数的証明，这里从略.

例 1.10.1. 在 (1.10.4) 中以

$$k_N(\theta)=\frac{1}{N+1}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(N+1)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right\}^2$$

代入，即得到$(C,1)$求和的 Fejer 核 $F_N(V)$，(事实上，我們在下一篇文章中将給出一个重要的 Fejer 核，与此不相同).

例 1.10.2. 在(1.10.4)中以

$$k_r(\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

代入,即得 Abel-Poisson 求和的 Poisson 核 $P(r, V)$(事实上,这与 §1.3 中所給出的 Poisson 核也是不同的).

参 考 文 献

[1] 华罗庚: 多复变数函数論中的典型域的調和分析,科学出版社, 1958 年.
[2] 华罗庚: 紧致羣上的連續函数所成的空間中的一条收斂定理,科学記录, **2** (1958), 341—344.
[3] 华罗庚: 一組偏微分方程,科学記录, **1** (1957), 339—340.
[4] 龔昇: 酉羣上的富理埃分析, I. Fourier 級数的部分和及求和.科学記录, **4** (1960),
[5] 龔昇: 酉羣上的富理埃分析, II. 华— Abel 求和.科学記录, **4**(1960).
[6] Peter, E. and Weyl, H., *Math. Anns.*, **97** (1927), 735—755.

FOURIER ANALYSIS ON UNITARY GROUP

I. ABEL SUMMABILITY AND DIRICHLET KERNEL OF FOURIER SERIES

KUNG SUN

(*The Chinese University of Science and Technology*)

ABSTRACT

It is known[6] that every continuous function on a compact group can be approximated by finite polynomials. Prof. Hua[2] has established that the Fourier series of continuous functions on unitary group can be summable to itself by means of the Abel summability. Hua's theorem is the first one for the convergence of Fourier series of functions on compact groups of a finite dimension. Certainly, a convergence theorem is better than an approximation theorem.

Let $u(U)$ be an integrable function on n-dimensional unitary group U_n, Its Fourier series is

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n} \operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right), \tag{1}$$

where

$$\Phi_{f_1\cdots f_n}(U) = \sqrt{\frac{N(f)}{C}}\, A_{f_1\cdots f_n}(U),$$

$$C_{f_1\cdots f_n} = \int_{U_n} u(V)\Phi_{f_1\cdots f_n}(\bar V)\dot V.$$

$A_{f_1\cdots f_n}(U)$ is the unitary representation with signature $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ where $f_1, f_2, \cdots, f_n$ are integers satisfying $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n$; $N(f) = N(f_1, \cdots, f_n)$ is the order of the matrix $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ and C is the volume of the unitary group U_n, i.e.

$$C = (2\pi)^{\frac{1}{2}n(n+1)}/((n-1)!\,(n-2)!\cdots 2!\,1!).$$

Hua[2] defined the Abel summability of Fourier series (1) as

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \rho^f(r)\operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right) = \frac{1}{C}\int_{U_n} u(VU)\,\frac{(1-r^2)^{n^2}\dot V}{|\det(1-r\bar V')|^{2n}},$$

where

$$\rho^f(r) = \frac{1}{N(f)} \cdot \frac{1}{C} \int_{U_n} \frac{(1 - r^2)^{n^2} \chi_f(V) \dot{V}}{|\det(I - r\overline{V}')|^{2n}}, \tag{2}$$

Moreover, he pointed out that

(i) $\rho^f(r) \to 1$ as $r \to 1$,

(ii) $\rho^f(r) = \begin{cases} r^{f_1 + \cdots + f_n} & f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0; \\ & \text{as} \\ r^{-f_1 - \cdots - f_n} & 0 \geqslant f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_{n-1} \geqslant f_n. \end{cases}$

In the present paper, by a complicate calculation, we proved

Theorem I.

$$\rho^f(r) = r^{f_1 + \cdots + f_s - f_{s+1} - \cdots - f_n} \sum_{s \geqslant g_{s+1} \geqslant \cdots \geqslant g_n \geqslant 0} \frac{N_s(f, g) N_s(g, f)}{N(f) N(g)} r^{2(g_{s+1} + \cdots + g_n)}$$

provided $l_1 > l_2 > \cdots > l_s \geqslant 0 > l_{s+1} > \cdots > l_n$ $(n \geqslant s \geqslant 0)$, where $N_s(a, b)$ denote $N(a_1, \cdots, a_s, b_{s+1}, \cdots, b_n)$, $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$, $(g_1 + n - 1, g_2 + n - 2, \cdots, g_n)$ is a permutation of $(0, 1, \cdots, n-1)$, $0 \geqslant g_1 \geqslant g_2 \geqslant \cdots \geqslant g_s \geqslant s - n$.

Many various forms of $\rho^f(r)$ are given also.

Moreover we establish the following

Theorem II. The partial sum

$$S_N^{(n)}(U) = \sum_{N \geqslant l_1 > \cdots > l_n \geqslant -N} \operatorname{tr}\left(C_{f_1 \cdots f_n} \Phi'_{f_1 \cdots f_n}(U)\right)$$

of the Fourier series (1) is

$$\frac{1}{C} \int_{U_n} u(VU) \mathscr{D}_N(V) \dot{V},$$

where $\mathscr{D}_N(V)$ is the Dirichlet kernel

$$\frac{(-i)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!\,2!\cdots(n-1)!\,D(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})} \begin{vmatrix} d_N(\theta_1), & \cdots, & d_N(\theta_n) \\ d'_N(\theta_1), & \cdots, & d'_N(\theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_N^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & d_N^{(n-1)}(\theta_n) \end{vmatrix},$$

$e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n}$ are the characteristic roots of $\overline{V}$, and $d_N(\theta) = \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \Big/ \sin \frac{1}{2}\theta$, the Dirichlet kernel of one variable.

Two proofs of theorem II are given, one is analytic, and the other is algebraic which is given by L. K. Hua.

数学学报征稿簡約

1. 本学报仅刊載具有創作性的論文.
2. 論文概用中文(語体)并附外文或外文摘要.
3. 外文最好請用打字机間行打就,公式則以手写为宜.
4. 插图請用白紙黑墨精繪.
5. 参考文献一律附在文后,并請按下列格式书写:
   Шнирельман, Л. Г., Об аддитивных свойствах чисел. *Ростов н/Д, Изд. Донск. политехн. ин-та.* **14** (1930), 8—32.
6. 凡經本学报发表的稿件,須先經专家审查,审查人不限于本学报的編輯委員.
7. 本学报編輯委員会認为必要时,得請求作者将稿件加以修改或精簡.
8. 稿件刊載的順序一般地以收到先后为原則.
9. 作者有負責精校印稿的义务.
10. 凡寄投本学报的稿件請作者自留底稿.
11. 稿件上請註明作者通信处.
12. 凡經本学报登載的稿件酌送稿費,并一律代印单行本 50 份,費用在稿費中扣除.
13. 凡不登載的稿件,当寄还作者.
14. 稿件請掛号寄北京西郊中关村中国科学院数学研究所数学学报編委会收.

数学学报　第10卷　第2期

Acta Mathematica Sinica, Vol. 10, No. 2

（季刊）

編輯者	中国数学会
出版者	科学出版社
印刷者	中国科学院印刷厂
总发行处	北京市邮局
訂購处	全国各地邮电局
代訂另售处	全国各地新华书店 科学出版社各地門市部

（京）道：1—1,280　报：1—2,830　　1960年6月出版

本期定价：道林本 2.50 元　报紙本 1.70 元

本刊代号：道 2—501　报 2—502